

Распределение кондактансов вблизи перехода Андерсона

И.М.Суслов

Институт физических проблем им.
П.Л.Капицы РАН

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{L}$$

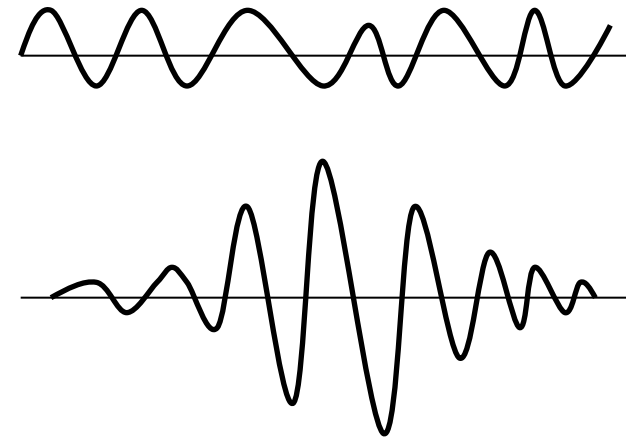
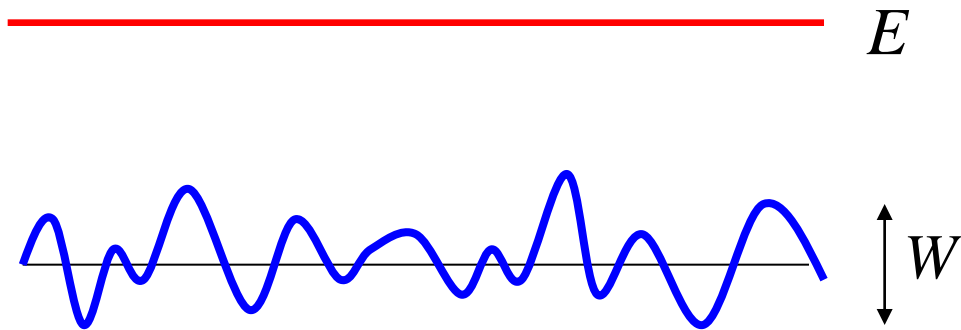
В частности, для куба размера L :

$$G = \sigma L^{d-2}$$

Безразмерный кондактанс:

$$g = \frac{G}{e^2 / h}$$

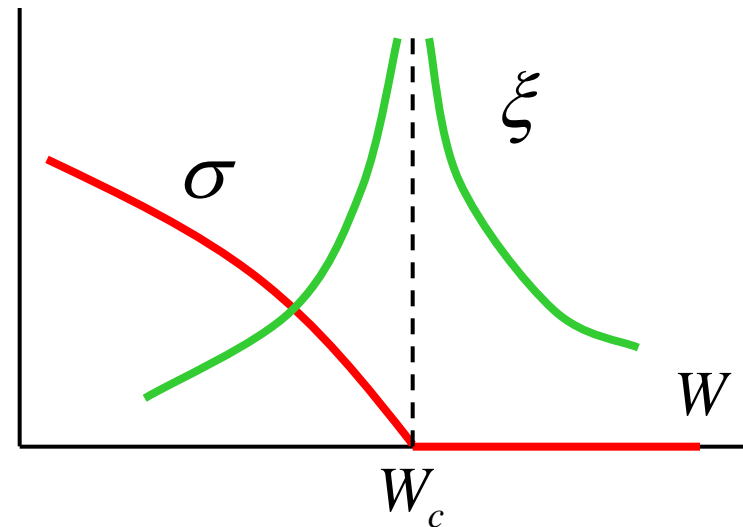
Переход Андерсона



$$\sigma \sim \tau^s$$

$$\xi \sim |\tau|^{-\nu}$$

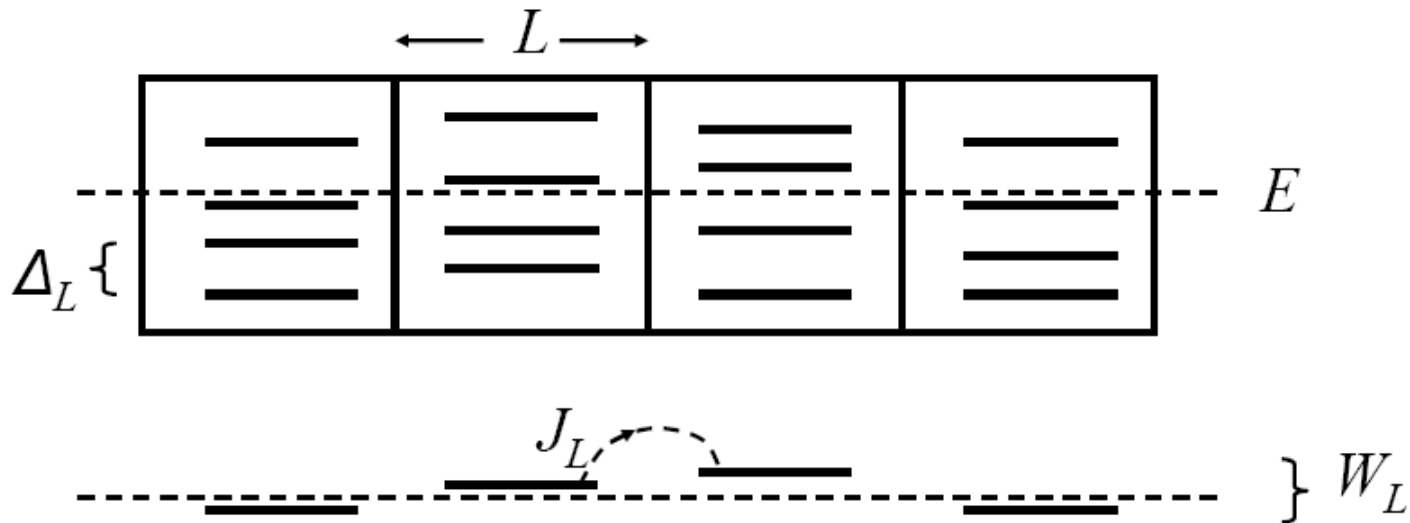
$$\tau \propto W_c - W$$



Скейлинговая теория локализации

«Банда четырех»:

E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan,
Phys. Rev. Lett. 42, 673 (1979).



Скейлинговый параметр

$$g_L = \frac{J_L}{W_L} = \frac{G_L}{e^2/\hbar}$$

где $G_L = \sigma_L L^{d-2}$ - полная проводимость (кондактанс) блока размера L

$$J_L \sim \hbar/\tau_D \quad \tau_D = L^2/D_L$$

$$W_L \sim \Delta_L \sim 1/\nu_F L^d$$

$$\sigma_L = e^2 \nu_F D_L$$

Поскольку блок размера nL может быть получен из n^d блоков размера L , то

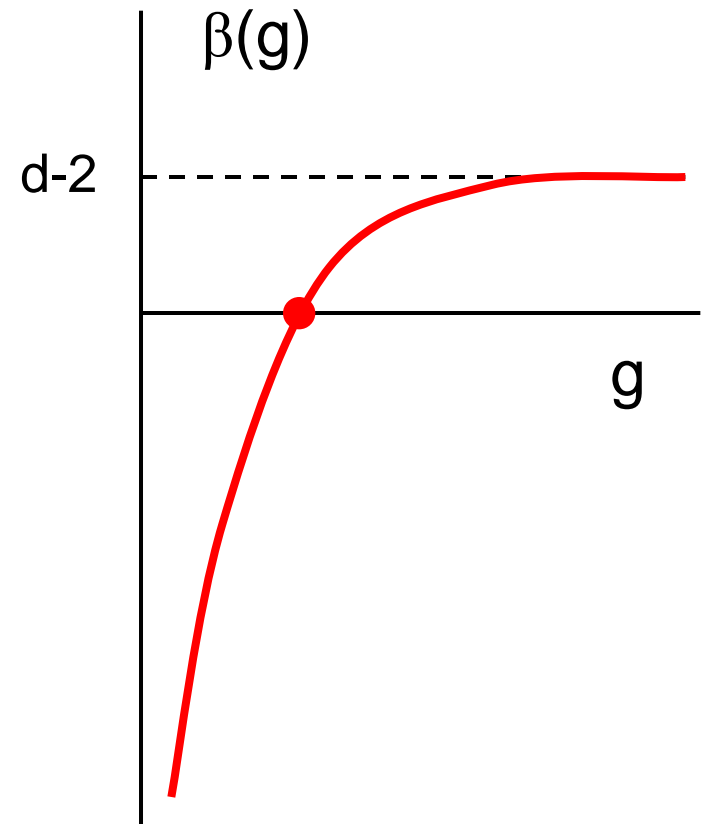
$$g_{nL} = F(g_L, n)$$

что при $n \rightarrow 1$ может быть записано в дифференциальной форме:

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g)$$

Заменяя под дифференциалом $\ln L$ на $\ln(L/\xi)$, получим

$$g = F\left(\frac{L}{\xi}\right)$$



История вопроса

В металлической фазе

$$g = \frac{\sigma L^{d-2}}{e^2 / h} \gg 1$$

Универсальные флуктуации кондуктанса:

$$\langle (\delta g)^2 \rangle \sim 1$$

Б. Л. Альтшулер, Письма в ЖЭТФ **41**, 530 (1985);

Б. Л. Альтшулер, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **42**, 291 (1985).

P. A. Lee, A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985);

P. A. Lee, A. D. Stone, Y. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).

Из нелинейной сигма-модели для $d = 2 + \epsilon$:

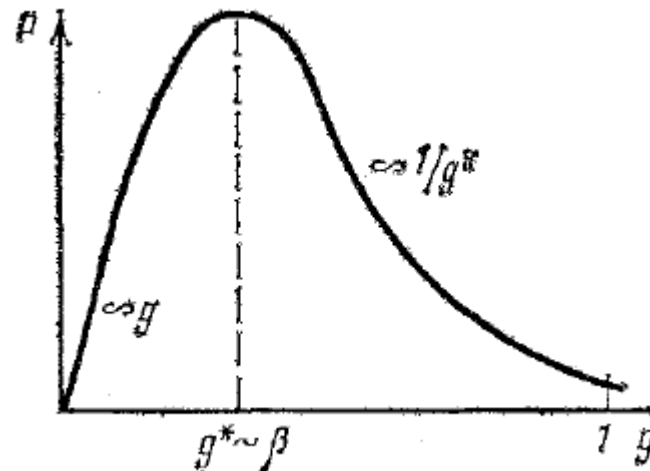
$$\langle\langle g^n \rangle\rangle = \begin{cases} \epsilon^{n-2}, & n < n_0 \\ L\epsilon^{n^2-2n}, & n > n_0 \end{cases} \quad n_0 \sim 1/\epsilon$$

(с обезразмериванием L на атомный масштаб), что указывает на нарушение однопараметрического скейлинга.

Б. Л. Альтшулер, В. Е. Кравцов, И. В. Лернер, ЖЭТФ **91**, 2276 (1986).

B. L. Altshuler, V. E. Kravtsov, I. V. Lerner Phys. Lett. A **134**, 488 (1989).

И.М.Суслов,
ЖЭТФ **92**, 1433 (1987).



Сведения из теории вероятностей

Характеристическая функция

$$F(t) = \langle e^{igt} \rangle$$

является производящей функцией моментов

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n \langle g^n \rangle / n!$$

а ее логарифм – производящей функцией кумулянтов

$$\ln F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n \langle\langle g^n \rangle\rangle / n!$$

Для суммы независимых случайных величин

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

характеристические функции перемножаются

$$F_S(t) = F_1(t) F_2(t) F_3(t) \dots F_n(t)$$

B. Shapiro, Phys. Rev. B **34**, 4394 (1986).

B. Shapiro, Phil. Mag. **56**, 1031 (1987).

B. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **65**, 1510 (1990).

Для распределения безразмерных сопротивлений ($\rho = 1/g$) в точке перехода получено

$$P_c(\rho) = \text{const} (\rho + 1)^{-\alpha}$$

где $\alpha = 1/\epsilon$ для $d = 2 + \epsilon$. По аналогии построен пример распределения с кумулянтами

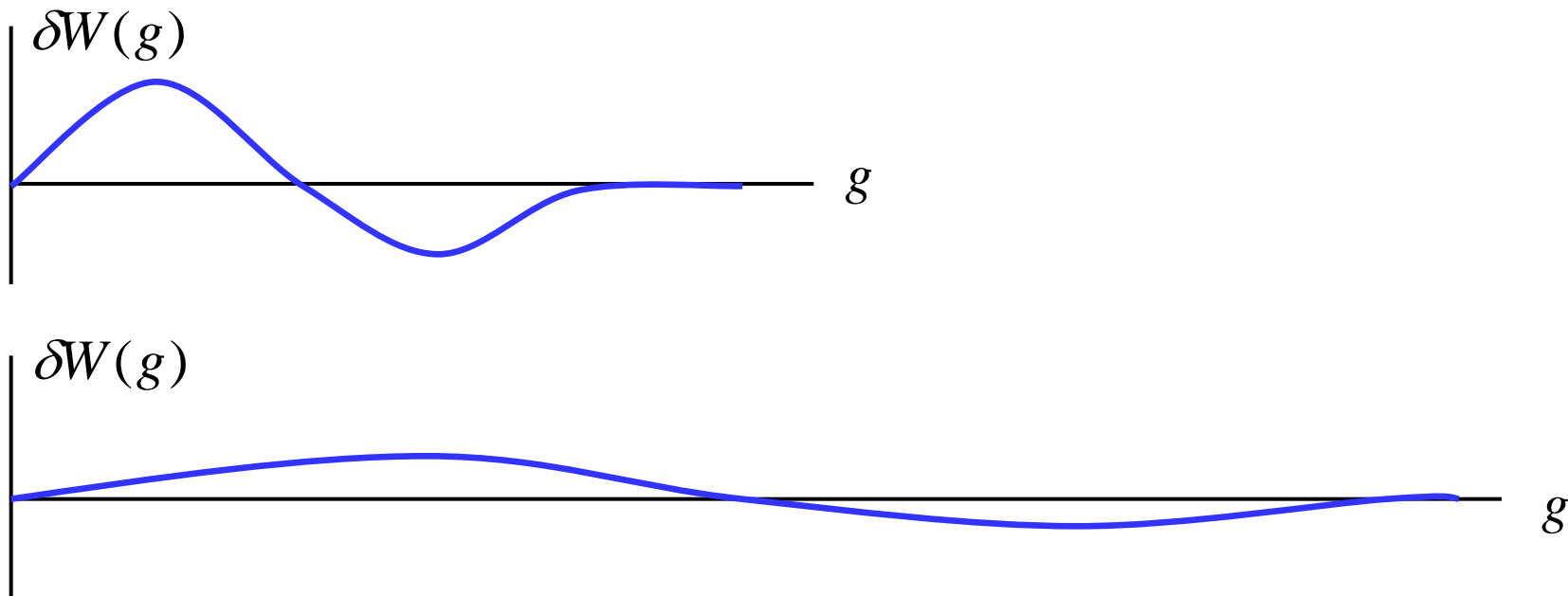
$$\langle\langle g^n \rangle\rangle = \begin{cases} \epsilon^{n-2}, & n < n_0 \\ L^{\epsilon n^2 - 2n}, & n > n_0 \end{cases} \quad n_0 = 2/\epsilon$$

которое удовлетворяет однопараметрическому скейлингу и имеет степенной хвост

$$W(g) \sim g^{-2/\epsilon}$$

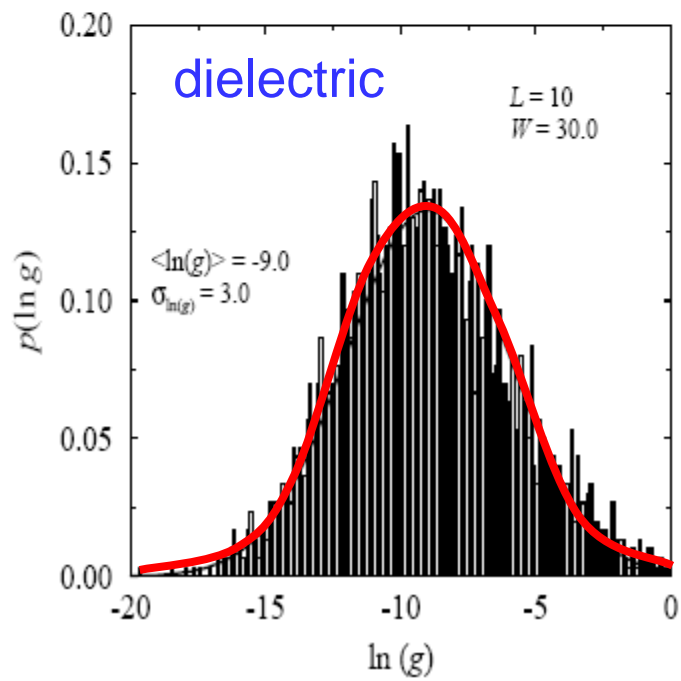
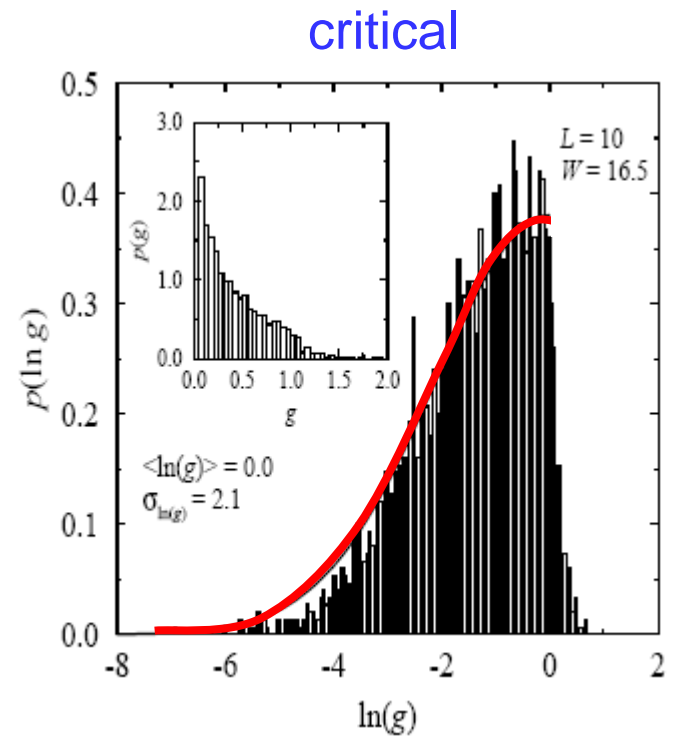
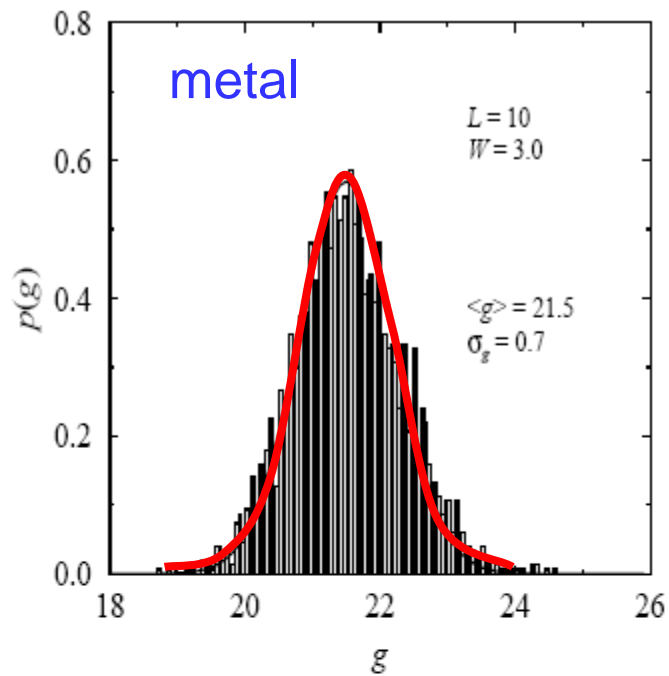
Но это противоречит численному счету.

В действительности результаты для кумулянтов Альтшулера и др. совместимы с экспоненциальным убыванием критического распределения $W_c(g)$, так как отклонения от него релаксируют путем диффузионного расплывания:

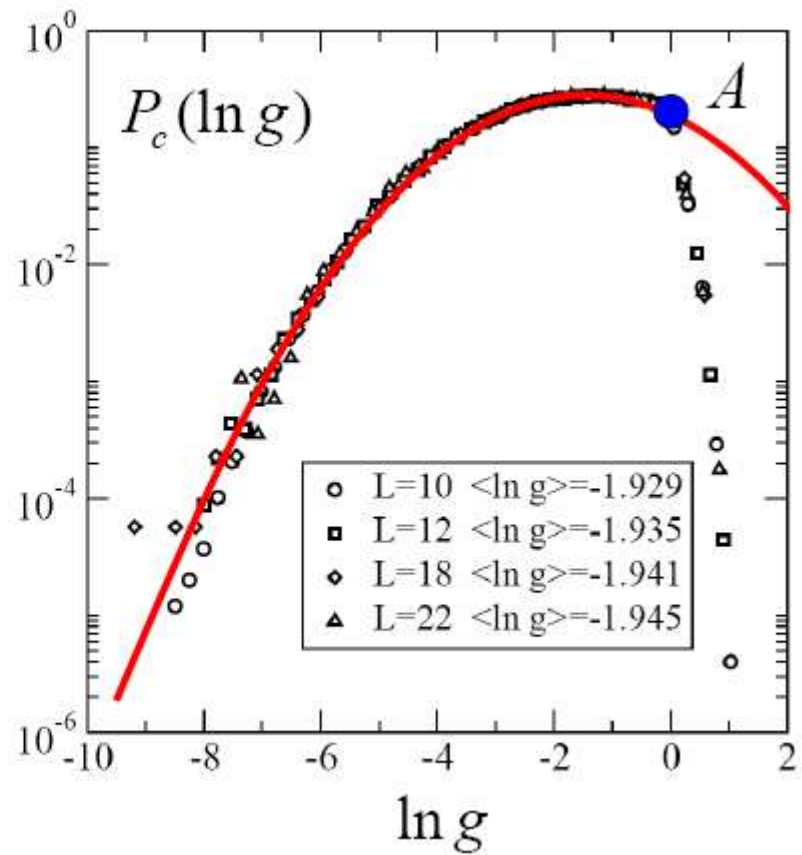
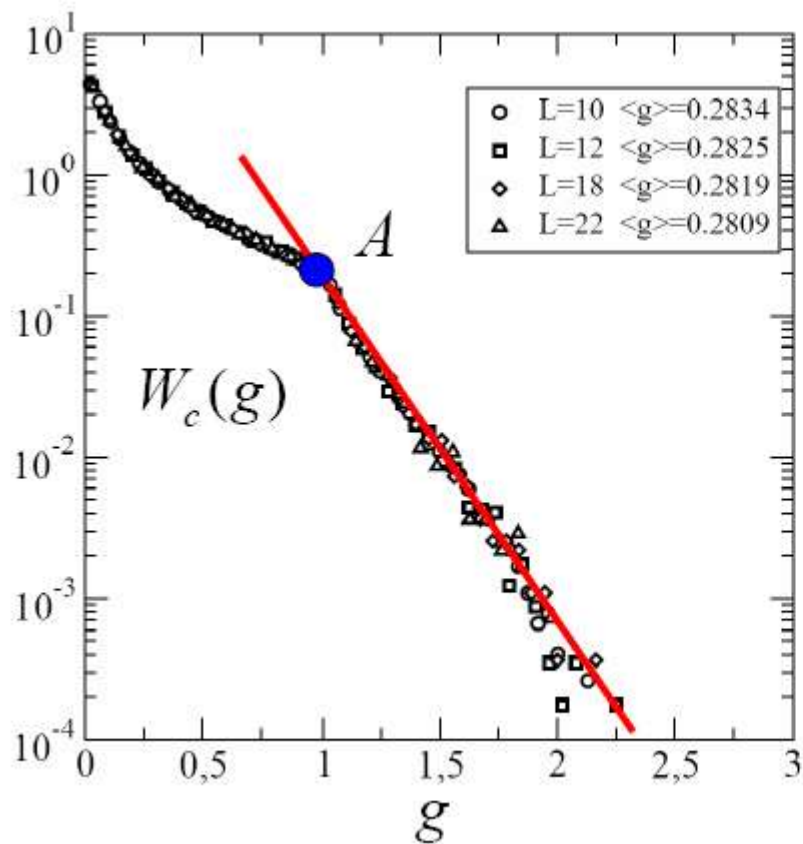


$$\delta W(g) \rightarrow 0$$

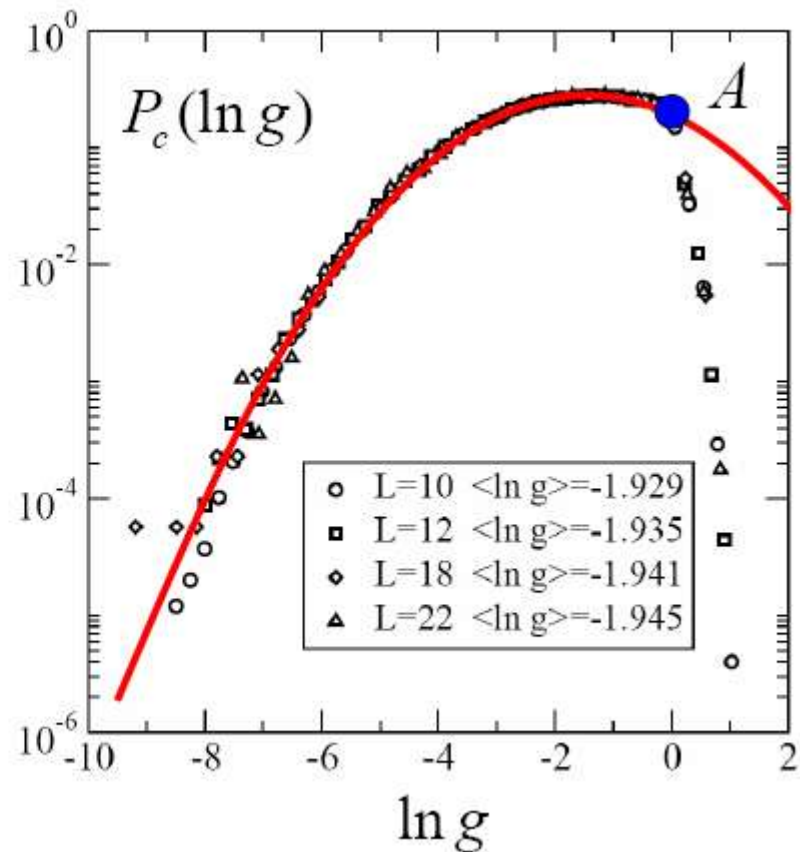
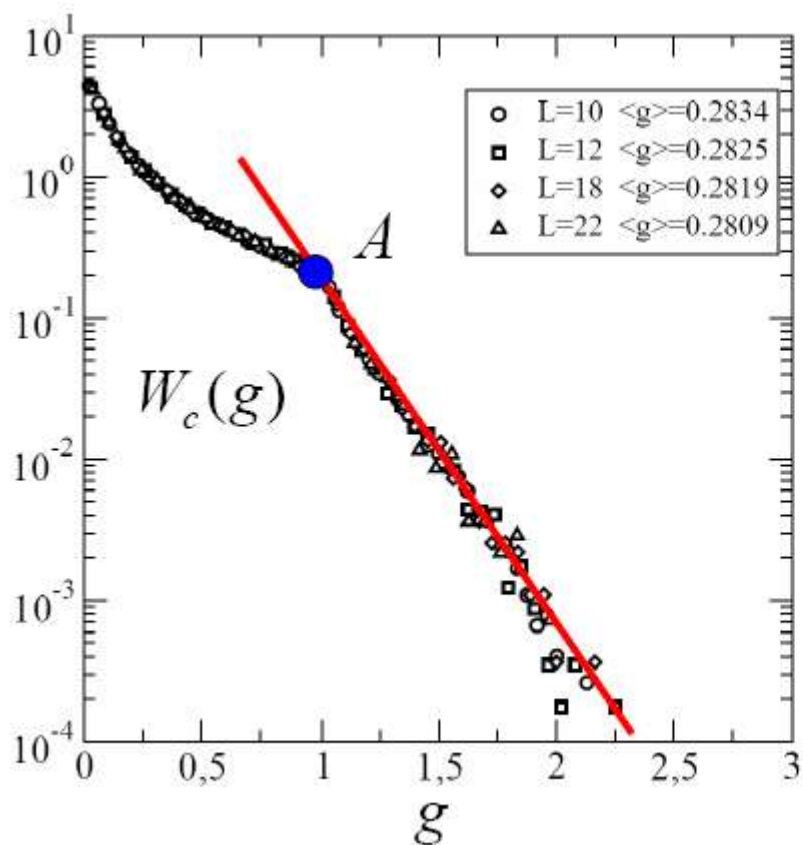
$$\langle g^n \rangle = \int dg g^n \delta W(g) \rightarrow \infty$$



M. Rühländer, C. M. Soukoulis,
Physica B Cond Matt. **296**, 32 (2001).



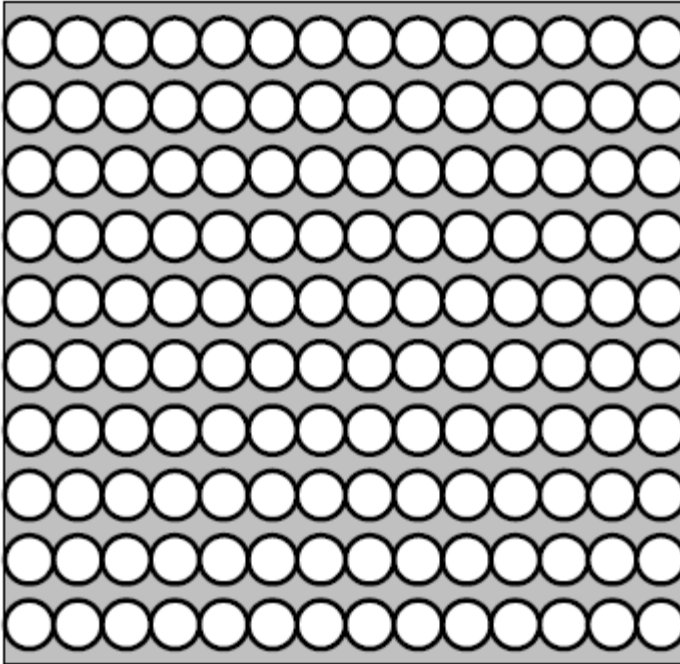
$$W(g) dg = gW(g) \frac{dg}{g} \equiv P(\ln g) d \ln g$$



Является ли точка A особой?

K.A.Muttalib, P.Woelfle et al, Europhys. Lett. 61, 95 (2003)

Метод Шапиро



$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(\rho^2 + \rho) \frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} \right]$$

Переходя к уравнению для $W(g)$

$$\frac{\partial W(g)}{\partial L} = \alpha [2g(1+g)W(g) + g^2(1+g)W'_g(g)]'_g$$

и используя вместо характеристической функции преобразование Лапласа

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\tau g} W(g) dg$$

получим для одномерной цепочки

$$F_{L+\Delta L}(\tau) = F_L(\tau) + \alpha \Delta L [-\tau^2 F_L'''(\tau) + \tau(\tau-1)F_L''(\tau)]$$

Возводя $F_L(\tau)$ в степень $n = b^{d-1}$ и полагая $b = 1 + \Delta L/L$, получим

$$F_{L+\Delta L}^{(d)}(\tau) = F_{L+\Delta L}^{(1)}(\tau) + (d-1) \frac{\Delta L}{L} F_L^{(1)}(\tau) \ln F_L^{(1)}(\tau)$$

что дает для d -мерного случая

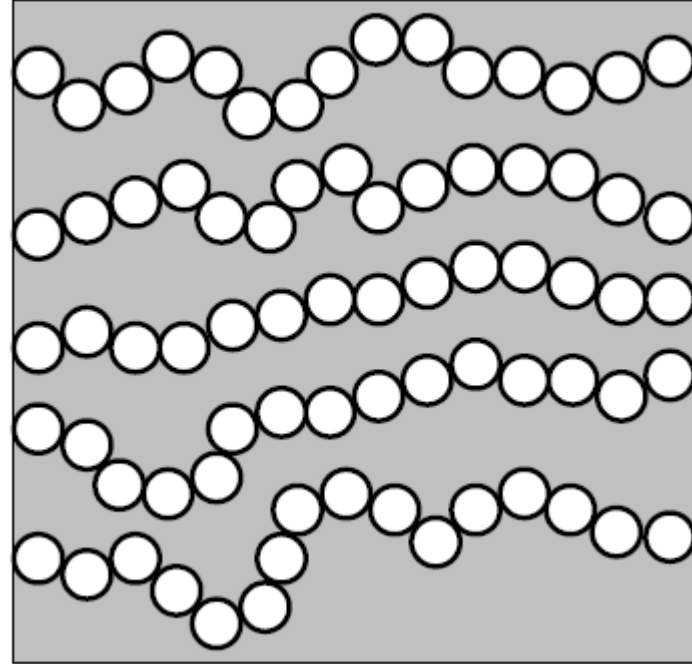
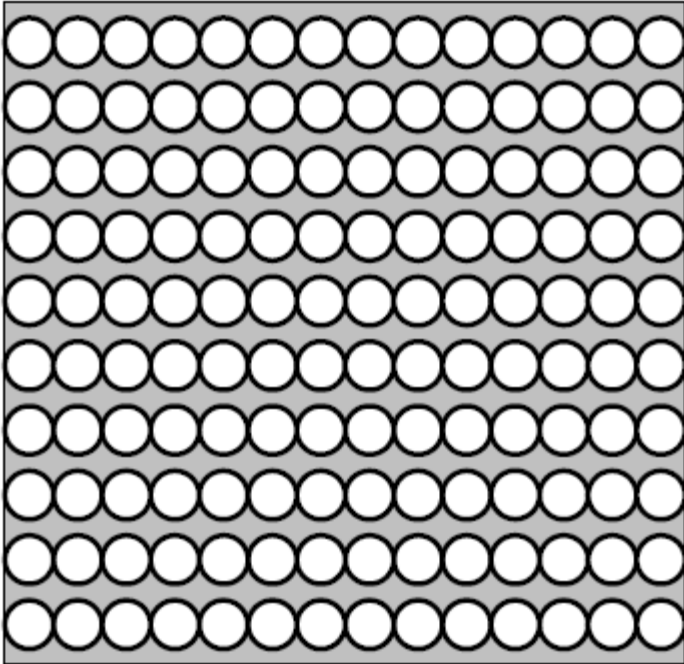
$$\frac{\partial F(\tau)}{\partial \ln L} = \alpha L [-\tau^2 F'''(\tau) + \tau(\tau-1)F''(\tau) + pF(\tau) \ln F(\tau)]$$

Фактически уравнение для $F(\tau)$ не исследовалось и заменялось упрощенным уравнением.

В результате получены:

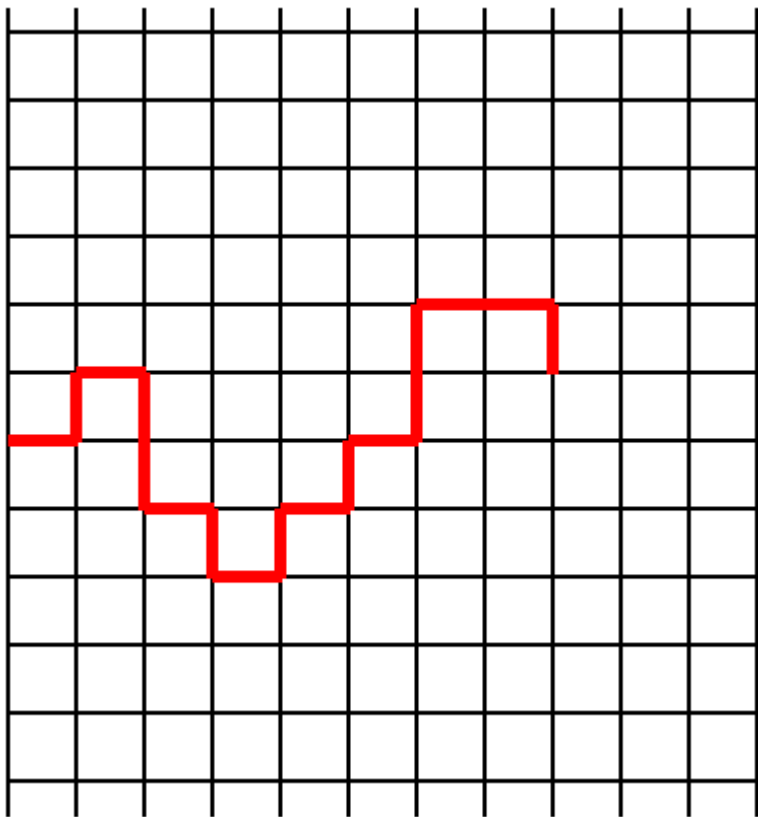
- (1) Правильное лог-нормальное распределение для локализованной фазы;
- (2) Не совсем правильные, но интересные результаты для критической точки;
- (3) Неправильные результаты для металлической фазы.

Модификация метода



Вместо искусственной модели используется представление о резонансных каналах.

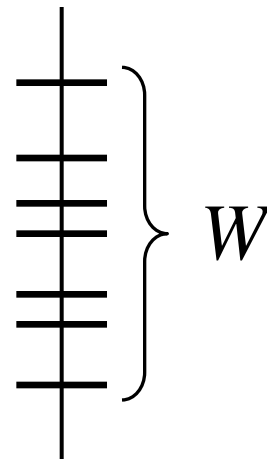
И. М. Лифшиц, В. Я. Кирпиченков, ЖЭТФ **77**, 989 (1979).



$$L' \sim Ld$$

$$W' \sim \frac{W}{d}$$

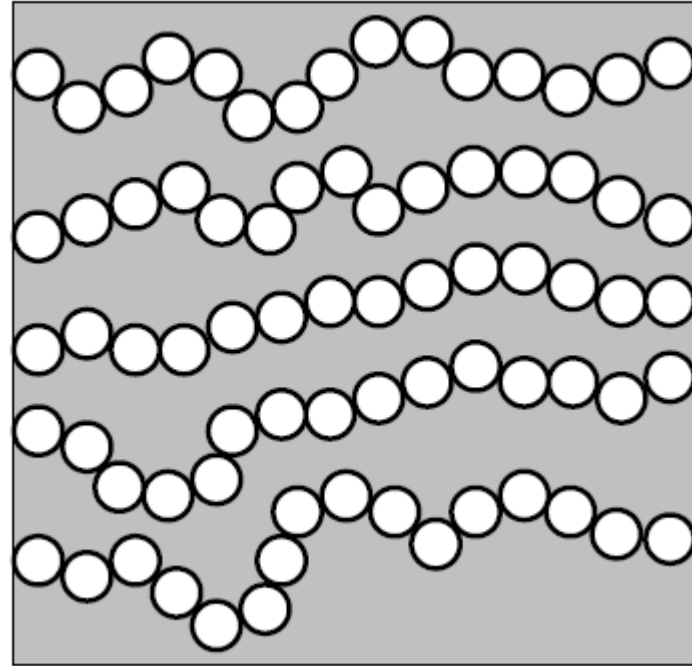
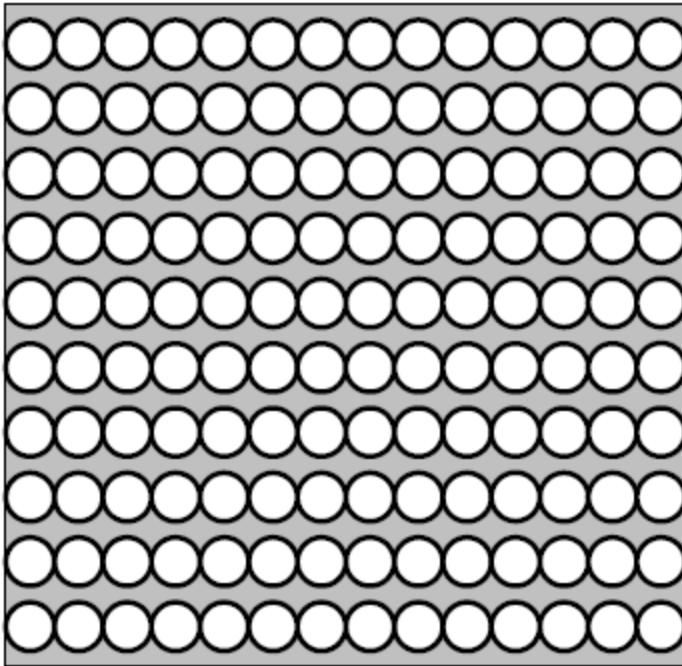
$$(\alpha L)' \sim \frac{\alpha L}{d}$$



$$g \sim \exp(-\alpha L) , \quad \alpha \sim W^2$$

$$g' \gg \gg g$$

Модификация метода

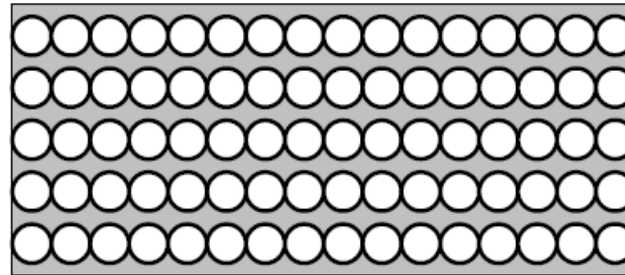
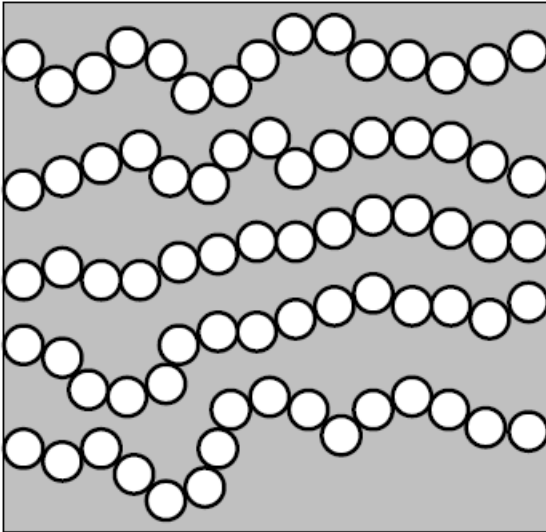


Такая модификация устраняет внутреннее противоречие метода Шапиро:

$$g(L) \sim L^{d-1} \exp(-\alpha L)$$

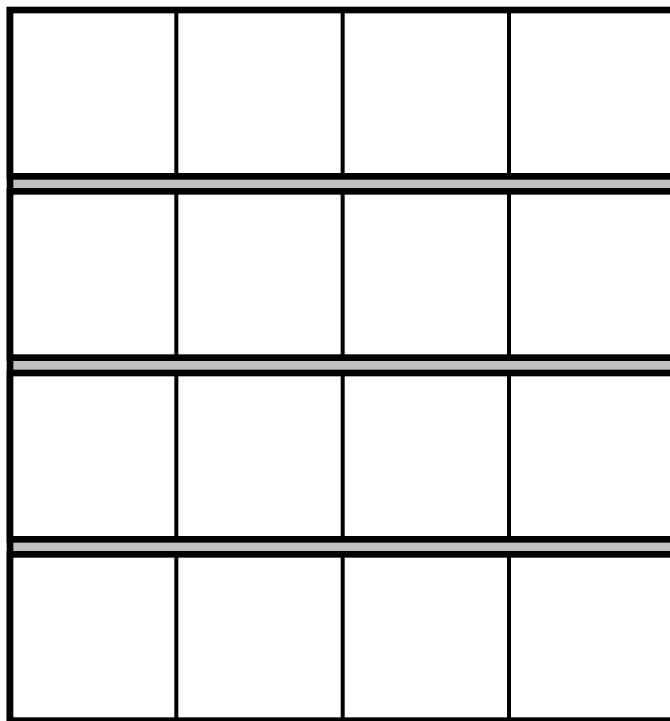
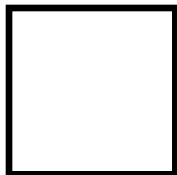
т.к. $\alpha = \alpha(L)$.

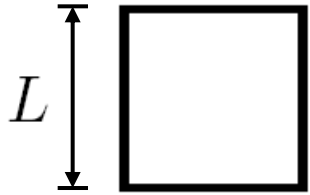
«Распрямленная» версия



Преобразование куба в параллелепипед – неконтролируемый эффект в методе Шапиро.

Крупно-масштабные построения





$$g = F(L/\xi)$$

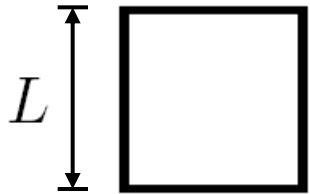


$$g = F(L/\xi, L_z/L)$$

$$\langle g \rangle = \sigma L^{d-1} L_z^{-1} = (L/\xi)^{d-2} (L/L_z)$$

$$\langle (\delta g)^2 \rangle = c(L_z/L)$$

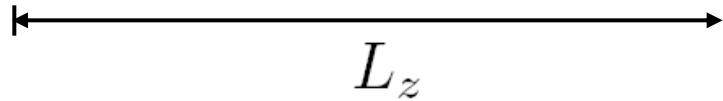
$$c(x) = \begin{cases} c_{d-1}, & x \ll 1 \\ c_d, & x = 1 \\ c_1, & x \gg 1 \end{cases}$$



$$g = F(L/\xi)$$



$$g = F(L/\xi, L_z/L)$$



Полагая $L=a$, получим строго одномерную систему:

$$g = F(a/\xi, L_z/a)$$



Фактически одномерное уравнение эволюции

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(\rho^2 + \rho) \frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} \right]$$

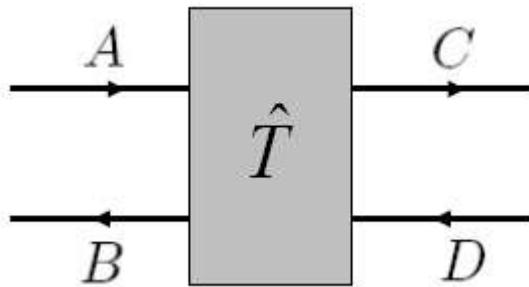
допускает двухпараметрическое обобщение

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = A \left[-\gamma(2\rho + 1)P_L(\rho) + (\rho^2 + \rho)P'_L(\rho) \right]'$$

обладающее примерно тем же уровнем универсальности.

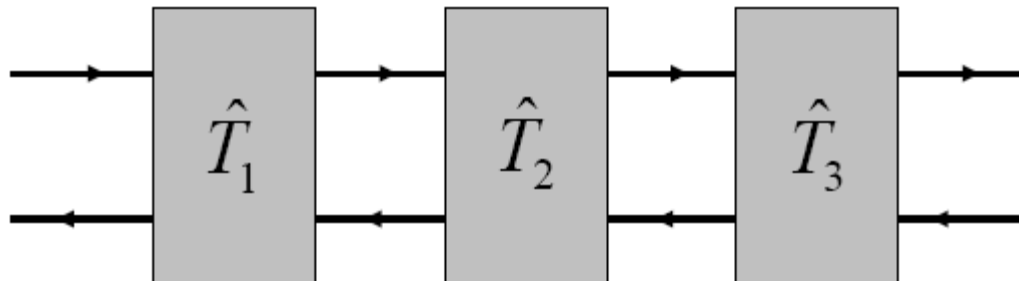
Трансфер-матрицы

Одномерный рассеиватель рассматривается как «черный ящик»



$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

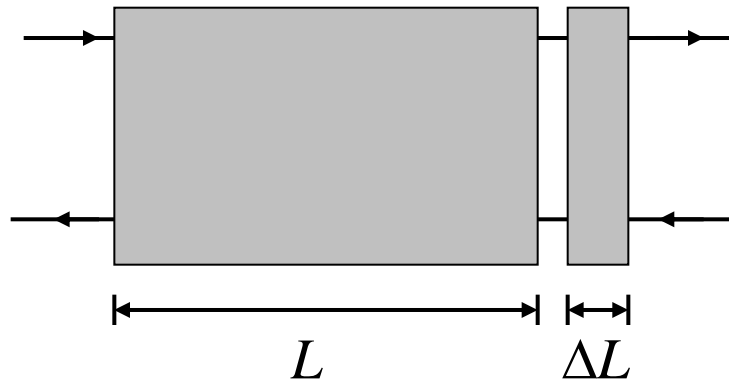
При последовательном соединении рассеивателей трансфер-матрицы перемножаются:



Трансфер-матрица допускает параметризацию

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho+1} e^{-i\varphi} & -\sqrt{\rho} e^{-i\theta} \\ -\sqrt{\rho} e^{i\theta} & \sqrt{\rho+1} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

где ρ – ландауэровское сопротивление.



$$\hat{T}_{L+\Delta L} = \hat{T}_L \hat{T}_{\Delta L}$$

При больших L распределение φ и θ обычно стабилизируется

$$P_L(\rho, \varphi, \theta) = P_L(\rho) P(\varphi, \theta)$$

Если $P(\varphi, \theta) = \text{const}$, то справедливо уравнение Шапиро

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(\rho^2 + \rho) \frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} \right]$$

В общем же случае получается уравнение

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = A \left[-\gamma(2\rho + 1)P_L(\rho) + (\rho^2 + \rho)P_L'(\rho) \right]'$$

с параметрами

$$\gamma = \frac{1 - 2A_0}{2A_0}, \quad A = 2\alpha A_0, \quad A_0 = \langle \sin^2(\varphi - \theta) \rangle$$

Полученное уравнение – диффузионного типа со «временем» $t = 2\alpha A_0 L$. Поэтому любое начальное распределение $P_0(\rho)$, локализованное при малых ρ , на больших временах превращается в универсальное распределение, которое имеет различный вид в области больших и малых ρ :

$$P(\rho, t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \frac{\rho^\gamma \exp\{-\rho/t\}}{t^{\gamma+1}}, \quad \rho \lesssim 1$$

$$P(\rho, t) = \frac{1}{\rho\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{[\ln \rho - (2\gamma + 1)t]^2}{4t}\right\}, \quad \rho \gtrsim 1$$

При больших γ первое распределение близко к гауссовскому:

$$P(\rho, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t^2}} \exp\left\{-\frac{(\rho - \gamma t)^2}{2\gamma t^2}\right\}$$

Предыдущие формулы верны на больших временах, когда диффузионное уширение превышает ширину начального распределения. В обратном случае справедливо автомодельное решение

$$P(\rho, t) = e^{-2\gamma t} P_0 \left\{ - \left(\rho + \frac{1}{2} \right) e^{-2\gamma t} - \frac{1}{2} \right\}$$

которое при $\gamma t \ll 1$ сводится к чистому дрейфу

$$P(\rho, t) = P_0 (\rho - \gamma t)$$

Если начальное распределение является гауссовским, то воспроизводятся общепризнанные результаты для металлической фазы; тем самым устраняется главный дефект метода Шапиро.

В диэлектрической фазе распределение лог-нормальное.

Уравнение

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = A \left[-\gamma(2\rho + 1)P_L(\rho) + (\rho^2 + \rho)P'_L(\rho) \right]'$$

с конечным γ возникает в двух случаях:

(1) При не слишком больших L , когда распределение еще не стабилизировалось;

(2) В решеточных моделях при наличии эффектов соизмеримости:

$$ka = \frac{r}{q} \quad \text{— рациональное число}$$

M. Kappus, F. Wegner, Z. Phys. B **45**, 15 (1981).

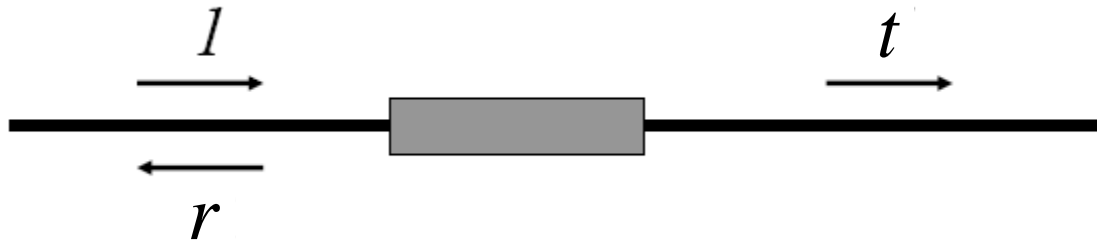
V. E. Kravtsov, V. I. Yudson, Ann. Phys. (NY) **326**, 1672 (2011).

Но существуют систематические причины для конечности γ .

Проводимость конечных систем

Формула Ландауэра

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \cdot \frac{|t|^2}{1-|t|^2}$$

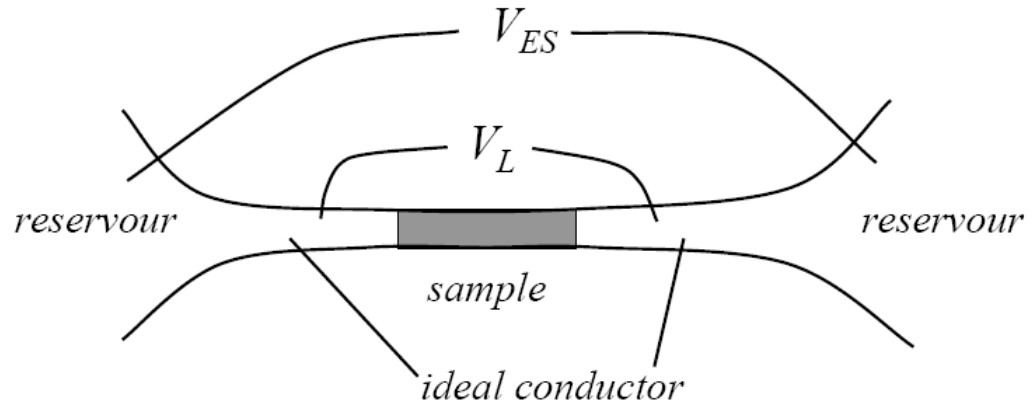


Другие определения

Одноканальный
случай:

$$G_L = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{|t|^2}{1-|t|^2}$$

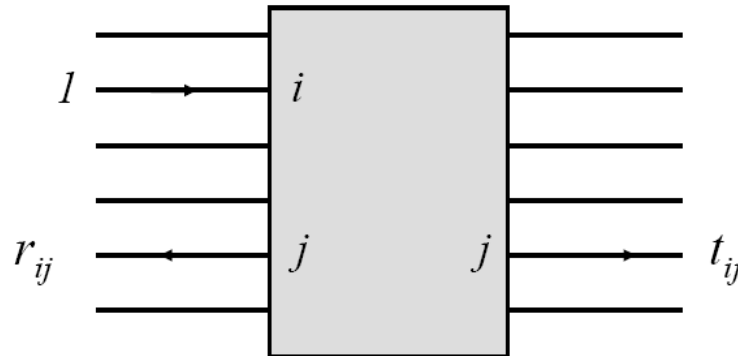
$$G_{ES} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} |t|^2$$



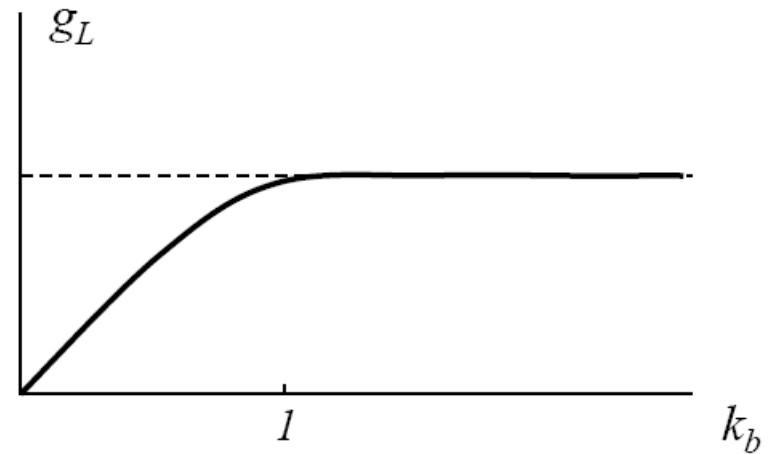
$$\frac{1}{G_L} = \frac{1}{G_{ES}} - \frac{2\pi\hbar}{e^2}$$

Многоканальный
случай:

$$G_{ES} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{ij} |t_{ij}|^2$$



Полупрозрачные границы



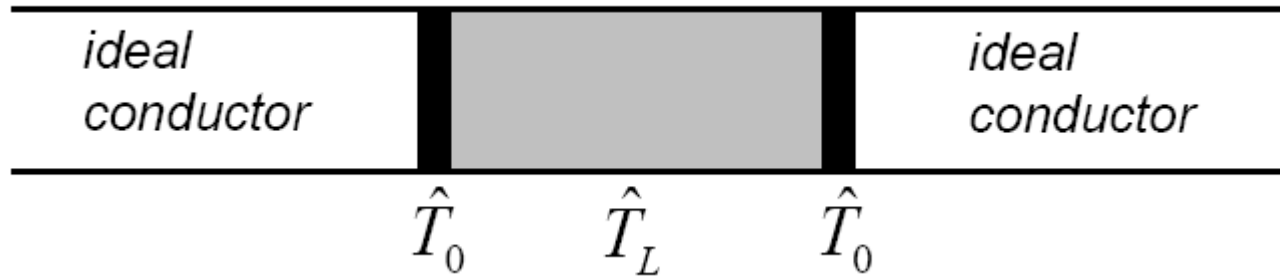
При введении полупрозрачных границ немедленно возникает конечное γ .

Предлагается определение

$$g_L^{open} = \left. \frac{dg_L(k_b)}{dk_b} \right|_{k_b=0}$$

Преимущества такого определения:

- (а) Оно заведомо характеризует внутренние свойства системы;
- (б) Решается вопрос о контактном сопротивлении резервуара;
- (в) Кондактанс идеальной системы является бесконечным



Полная трансфер-матрица

$$\hat{T}'_L = \hat{T}_0 \hat{T}_L \hat{T}_0$$

При увеличении размера системы на ΔL :

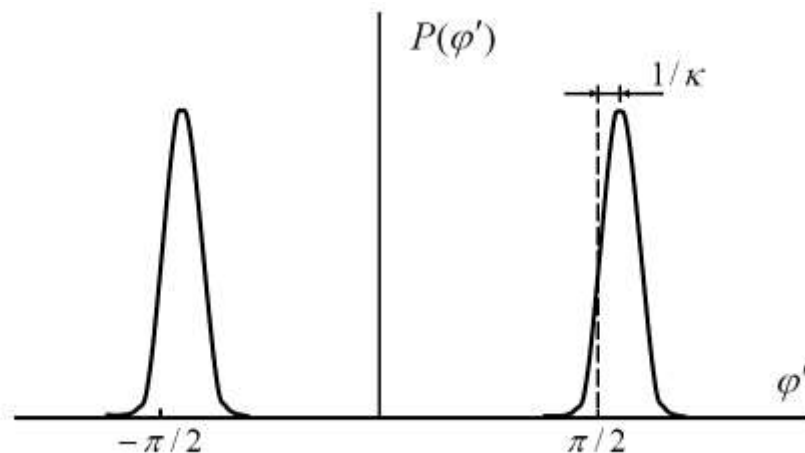
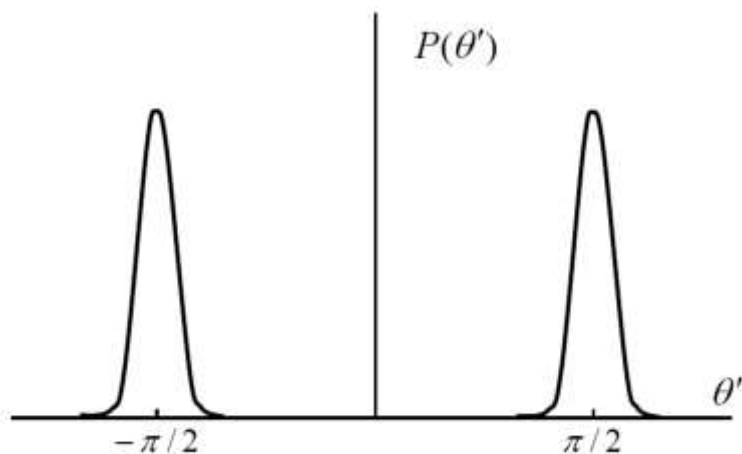
$$\hat{T}'_{L+\Delta L} = \hat{T}_0 \hat{T}_L \hat{T}_{\Delta L} \hat{T}_0 = \hat{T}'_L \cdot \hat{T}_0^{-1} \hat{T}_{\Delta L} \hat{T}_0$$

т.е. по-прежнему происходит умножение на матрицу, близкую к единичной.

Если принять \hat{T}_0 в виде

$$\hat{T}_0 = \begin{pmatrix} 1 - i\kappa & -i\kappa \\ i\kappa & 1 + i\kappa \end{pmatrix}$$

то при больших κ распределение θ' и φ' является сильно локализованным:



В результате

$$A_0 = \langle \sin^2(\varphi' - \theta') \rangle = 1/\kappa^2$$

и $\gamma = \kappa^2 / 2$

Упрощенные схемы

Схема Шапиро для средних

Из уравнения эволюции следует результат

$$\bar{\rho}_L = \frac{1}{2} (e^{2\alpha L} - 1)$$

из которого следует масштабное преобразование для одномерных систем:

$$\bar{\rho}_{bL}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[(1 + 2\bar{\rho}_L)^b - 1 \right]$$

Параллельное соединение b^{d-1} таких цепочек образует d -мерную систему:

$$\bar{\rho}_{bL} = \frac{1}{2} b^{-(d-1)} \left[(1 + 2\bar{\rho}_L)^b - 1 \right]$$

Беря b близким к единице, получим дифференциальное уравнение, которое в терминах переменной $g_L = 1/2\bar{\rho}_L$ имеет вид

$$\frac{d \ln g_L}{d \ln L} = d - 1 - (1 + g_L) \ln(1 + 1/g_L) \equiv \beta(g_L)$$

откуда для критического индекса корреляционной длины имеем правильный результат

$$\nu = 1/\epsilon \quad \text{для} \quad d = 2 + \epsilon$$

Фактически правильно писать

$$\bar{g}_{bL} = b^{d-1} \bar{g}_{bL}^{(1)}, \quad \text{а не} \quad \bar{\rho}_{bL} = b^{-(d-1)} \bar{\rho}_{bL}^{(1)}$$

но для $d = 2 + \epsilon$ это несущественно, т.к. распределение узкое.

При конечном γ результат для $\bar{\rho}_L$ остается неизменным.

Упрощенные схемы

Схема Шапиро для $P(\rho)$

Если все цепочки считать одинаковыми, то

$$P_L(\rho) = b^{d-1} P_L^{(1)}(b^{d-1}\rho)$$

и можно получить уравнение для $P(\rho)$:

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial \ln L} = A [-\gamma(2\rho + 1)P_L(\rho) + \rho(\rho + 1)P_L'(\rho) + p\rho P_L(\rho)]'$$

Оно имеет стационарное решение

$$P(\rho) = C \frac{\rho^\gamma}{(\rho + 1)^{p-\gamma}}$$

при $\gamma = 0$ совпадающее с результатом Шапиро.

Если принять результат

$$\bar{\rho} = \epsilon \quad \text{для} \quad d = 2 + \epsilon$$

то

$$p = (\gamma + 1)/\epsilon$$

Распределение имеет конечные моменты $\langle g^n \rangle$ для $n \lesssim \gamma$.

Полагая $\gamma \sim 1/\epsilon^2$ и вычисляя преобразование Лапласа методом перевала, получим

$$F(\tau) = \exp \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} f(\epsilon\tau) \right\}$$

где $f(x)$ имеет регулярное разложение и обеспечивает правильные результаты для кумулянтов

$$\langle\langle g^n \rangle\rangle \sim \epsilon^{n-2}$$

Упрощенные схемы

Упрощенная схема для $d = 2 + \epsilon$

Полное уравнение для $F(\tau)$ содержит нелинейный член $F \ln F$. Поскольку при $d = 2 + \epsilon$ кумулянты $\langle\langle g^n \rangle\rangle$ быстро убывают с ростом n , то в главном приближении можно положить

$$\ln F(\tau) \approx c\tau$$

и получить уравнение для $P(\rho)$:

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial \ln L} = A [c\rho^2 P(\rho) - \gamma(2\rho + 1)P(\rho) + \rho(\rho + 1)P'(\rho)]'$$

Если $\rho = |r/t|^2$ – ландауэровское сопротивление, $\tilde{\rho} = |1/t|^2$ – определение Эконому-Соукоулиса, то $\rho = \tilde{\rho} - 1$. В общем случае неоднозначность определения соответствует замене $\rho \rightarrow \rho - \rho_0$. Эта замена несущественна для слабо прозрачных границ, когда масштаб ρ возрастает в κ^4 раз.

При этом

$$\rho(\rho+1) \rightarrow (\rho-\rho_0)(\rho+1-\rho_0) \rightarrow \rho^2$$

и от неуниверсальных членов можно избавиться, сохранив главный порядок по ρ . В остальных членах последствия замены $\rho \rightarrow \rho - \rho_0$ могут быть устранены переопределением параметров и изменением масштаба ρ . В результате

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial t} = [(c\rho^2 - 2\gamma\rho - \gamma)P(\rho) + \rho^2 P'(\rho)]', \quad t = A \ln L$$

Переход к $W(g)$ дает уравнение той же структуры

$$\frac{\partial W(g)}{\partial t} = [(\gamma g^2 + 2(\gamma+1)g - c)W(g) + g^2 W'(g)]'$$

чем объясняется странная аналогия, обнаруженная Шапиро.

Стационарное решение имеет вид

$$W(g) = g^{-2(\gamma+1)} \exp\{-c/g - \gamma g\}$$

и обеспечивает конечность всех моментов кондактанса.

Вычисляя преобразование Лапласа методом перевала и полагая $\gamma \sim 1/\varepsilon$, $c \sim 1/\varepsilon^3$ получим

$$F(\tau) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^2} f(\varepsilon\tau)\right\}$$

что обеспечивает правильные результаты для кумулянтов стационарного распределения.

В нестационарном случае имеем для моментов

$$\frac{\partial \langle g^n \rangle}{\partial t} = pn \langle g^{n-1} \rangle + n(n - 2\gamma - 1) \langle g^n \rangle - \gamma n \langle g^{n+1} \rangle$$

Если отклонения от стационарности $\sim \exp(\lambda t)$, то для спектра λ в квазиклассическом приближении имеем

$$\operatorname{Re}\lambda_n = \frac{n^2/2 - (2\gamma + 1)n}{\ln n}, \quad n \lesssim 1/\epsilon^2$$

В области значений $n \sim 1/\epsilon$ знаменатель можно заменить на $\ln(1/\epsilon)$ и получить для эволюции моментов

$$\langle g^n \rangle \sim e^{\lambda_n t} \sim L^{\tilde{A}[n^2 - 2(2\gamma + 1)n]}$$

При выборе $\tilde{A} = \epsilon$, $(2\gamma + 1)\tilde{A} = 1$ воспроизводится результат для кумулянтов Альтшулера и др.

$$\langle\langle g^n \rangle\rangle \sim L^{\epsilon n^2 - 2n}$$

Логарифмическая точность связана с приближенностью схемы.

Переход к универсальному определению

Определения по Ландауэру и Эконому-Соукоулису

$$\rho = \frac{|r|^2}{|t|^2} \qquad \tilde{\rho} = \frac{1}{|t|^2}$$

связаны соотношением $\rho = \tilde{\rho} - 1$. В общем случае в уравнении

$$\frac{\partial P_L(\rho)}{\partial L} = A \left[-\gamma(2\rho + 1)P_L(\rho) + (\rho^2 + \rho)P_L'(\rho) \right]'$$

надо делать замену $\rho \rightarrow \rho - \rho_0$, так что

$$\begin{aligned} \rho(\rho+1) &\rightarrow (\rho - \rho_0)(\rho + 1 - \rho_0) \rightarrow \rho^2 \\ \gamma(2\rho+1) &\rightarrow 2\gamma\rho + \gamma(1 - 2\rho_0) \rightarrow 2\gamma\rho + \tau_0 \end{aligned}$$

Полная теория

Основное уравнение

$$\frac{\partial F(\tau)}{\partial t} = \tau(\tau + \tau_0)F''(\tau) - 2\gamma\tau F'(\tau) + pF(\tau) \ln F(\tau), \quad t = A \ln L$$

где $\tau_0 > 0$ задает общий масштаб кондактанса, и $\gamma \geq -1/2$.

Замена $F(\tau) = \exp\{u(\tau)\}$ дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tau(\tau + \tau_0) [u'' + u'^2] - 2\gamma\tau u' + pu$$

Уравнение определяет эволюцию распределения при росте L при условиях

$$L/\xi = const, \quad L_z/L = const$$

$$\frac{\partial F(\tau)}{\partial \ln L} = \alpha L [-\tau^2 F'''(\tau) + \tau(\tau - 1)F''(\tau) + pF(\tau) \ln F(\tau)]$$

Воспроизведение результатов для $d = 2 + \epsilon$

Если искать стационарную конфигурацию в виде регулярного разложения

$$u(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \tau^n$$

то для коэффициентов получим

$$(p - 2\gamma)B_1 + \tau_0 B_1^2 + 2\tau_0 B_2 = 0,$$

$$(p - 4\gamma)B_2 + 4\tau_0 B_1 B_2 + 6\tau_0 B_3 + 2B_2 + B_1^2 = 0,$$

$$(p - 6\gamma)B_3 + 4\tau_0 B_2^2 + 6\tau_0 B_1 B_3 + 12\tau_0 B_4 + 6B_3 + 4B_1 B_2 = 0$$

При $d = 2 + \epsilon$ справедлива иерархия

$$B_1 \gg B_2 \gg B_3 \gg \dots$$

что позволяет отбросить члены, происходящие из $\tau\tau_0 u''(\tau)$.

Воспроизведение результатов для $d = 2 + \epsilon$

Если искать стационарную конфигурацию в виде регулярного разложения

$$u(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \tau^n$$

то для коэффициентов получим

$$(p - 2\gamma)B_1 + \tau_0 B_1^2 + \cancel{2\tau_0 B_2} = 0,$$

$$(p - 4\gamma)B_2 + 4\tau_0 B_1 B_2 + \cancel{6\tau_0 B_3} + 2B_2 + B_1^2 = 0,$$

$$(p - 6\gamma)B_3 + 4\tau_0 B_2^2 + 6\tau_0 B_1 B_3 + \cancel{12\tau_0 B_4} + 6B_3 + 4B_1 B_2 = 0$$

При $d = 2 + \epsilon$ справедлива иерархия

$$B_1 \gg B_2 \gg B_3 \gg \dots$$

что позволяет отбросить члены, происходящие из $\tau\tau_0 u''(\tau)$.

После этого все B_n определяются однозначно и при условиях $p \gg 1, \gamma \ll p$ получим

$$B_n \sim \frac{p}{\tau_0^n}$$

что подсказывает подстановку $u(\tau) = pf(\tau/\tau_0)$ и дает уравнение для $f(x)$:

$$x(x+1)f'^2 + f = 0$$

Его решение $f(x) = -\text{Arsh}^2 \sqrt{x}$, что дает

$$F(\tau) = \exp \left(-p \text{Arsh}^2 \sqrt{\tau/\tau_0} \right)$$

и нужная форма $F(\tau)$ получается при $\tau_0 \sim 1/\epsilon, p \sim 1/\epsilon^2$:

$$F(\tau) = \exp \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} f(\epsilon\tau) \right\}$$

Делая обратное преобразование Лапласа

$$W(g) = \frac{\tau_0}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dx \exp \left\{ -p \operatorname{Arsh}^2 \sqrt{x} + \tau_0 g x \right\}$$

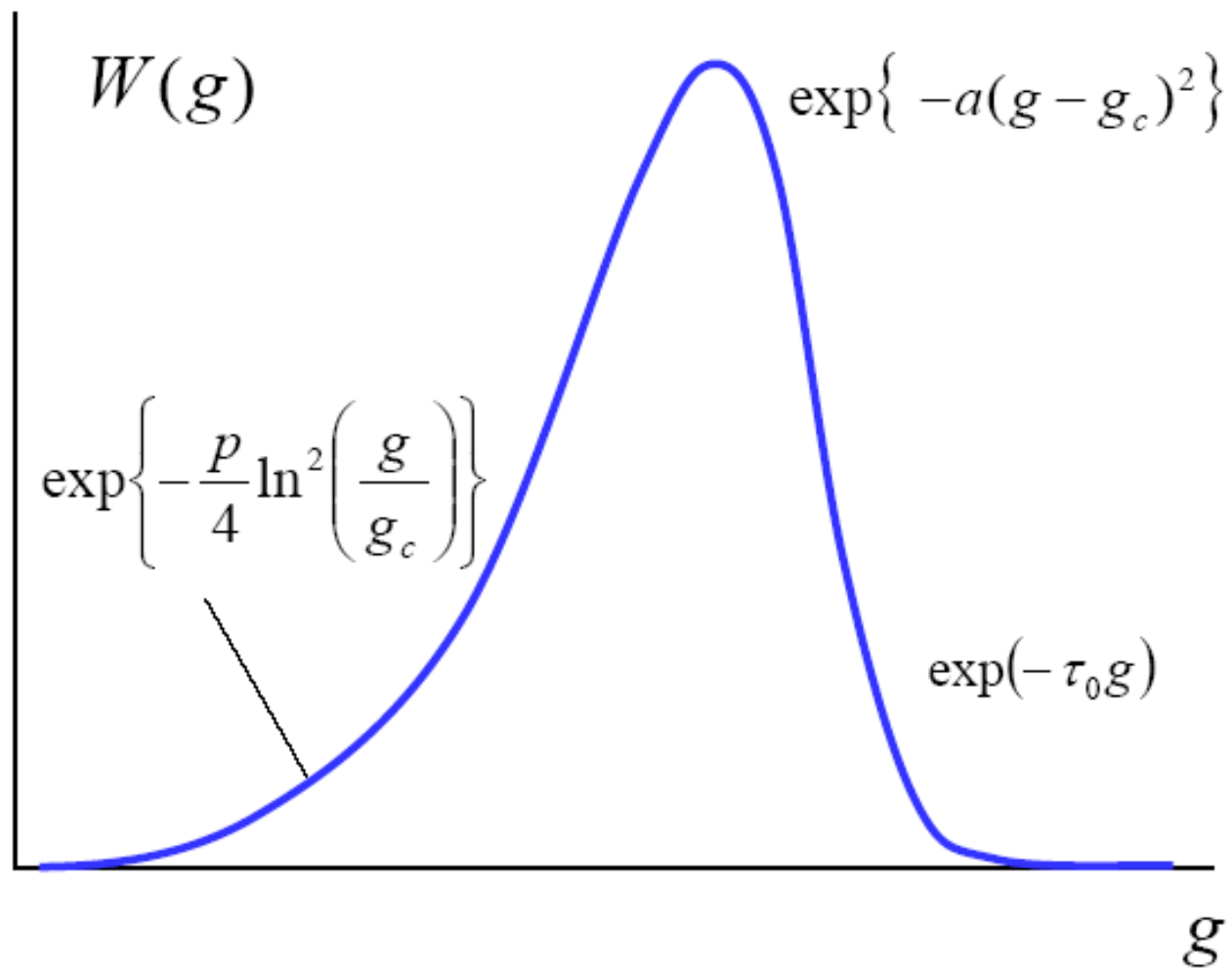
получим в перевальном приближении (полагая $g_c = p/\tau_0$)

$$W(g) = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{p \ln(g_c/g)}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{p}{4} (\ln g - \ln g_c)^2 \right\}, \quad g \ll g_c$$

$$W(g) = \tau_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi p}} \exp \left\{ -\frac{3}{4} p \left(\frac{g - g_c}{g_c} \right)^2 \right\}, \quad |g - g_c| \ll g_c$$

$$W(g) = \tau_0 \sqrt{\frac{\pi}{4p}} \left(\frac{g_c}{g} \right)^{3/2} \exp \left\{ p \frac{\pi^2}{4} - \tau_0 g \right\}, \quad g \gg g_c$$

При $p \sim 1$ первая асимптотика описывает окрестность максимума.



Нестационарный режим

Если отклонения распределения от стационарного пропорциональны $\exp(\lambda t)$, то получаем уравнение ($x = \tau/\tau_0$)

$$x(x+1)u'_x{}^2 + pu = -x(x+1)u''_{xx} + 2\gamma xu'_x + \lambda u$$

Учитывая правую часть итерационным образом и опуская xu'' :

$$\hat{L}\delta u = f\{u\} \equiv -x^2 u'' + 2\gamma x u' + \lambda u$$

Если в правую часть внести возмущение

$$u = u_n(x) = B_n x^n, \quad \lambda = \lambda_n = n^2 - (2\gamma + 1)n$$

то $f\{u\} = 0$ и $\delta u = 0$. Такое возмущение порождает нестационарную эволюцию кумулянтов

$$\langle\langle g^n \rangle\rangle \sim e^{\lambda_n t} \sim L^{A[n^2 - (2\gamma + 1)n]}$$

что при $A = \epsilon$, $(2\gamma + 1)A = 1$ воспроизводит Альтшулера и др.

Единственность физического решения

При больших τ в уравнении

$$\tau(\tau + \tau_0) [u'' + u'^2] - 2\gamma\tau u' + pu = 0$$

можно заменить $\tau(\tau + \tau_0)$ на τ^2 , после чего замена

$$x = \ln \tau$$

приводит его к виду

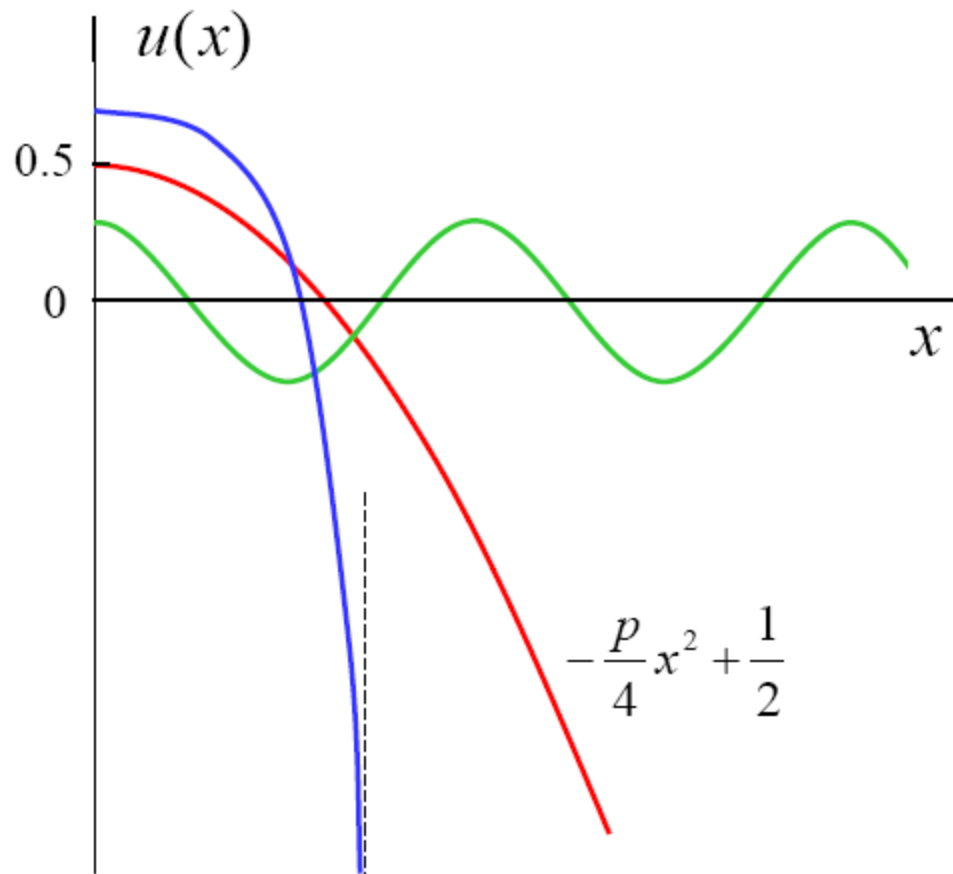
$$u''_{xx} + (u'_x)^2 - \tilde{\gamma}u'_x + pu = 0$$

где $\tilde{\gamma} = 2\gamma + 1$. При $\tilde{\gamma} = 0$ оно интегрируется в квадратурах:

$$x = C_1 + \int \frac{du}{\sqrt{Y(u)}}, \quad Y(u) = C_2 e^{-2u} + \frac{p}{2}(1 - 2u)$$

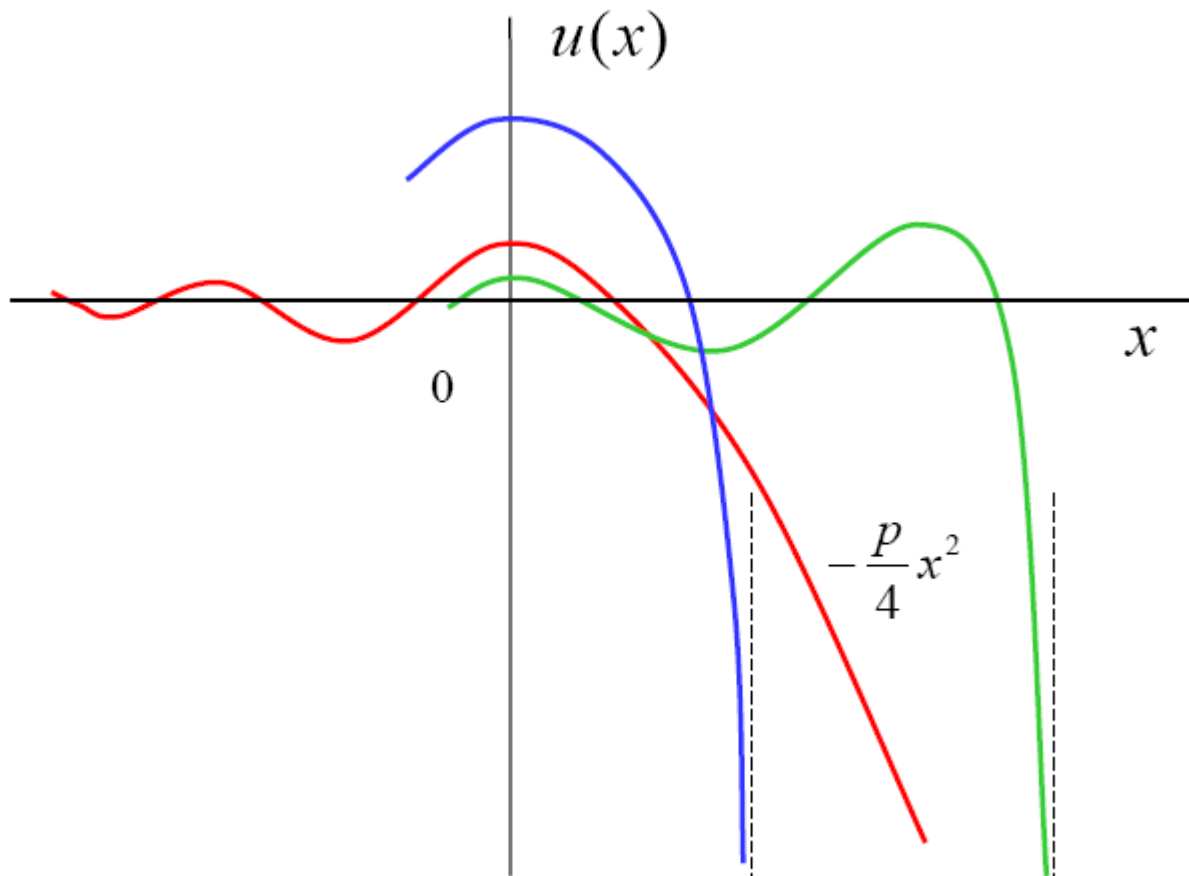
$$u''_{xx} + (u'_x)^2 + pu = 0$$

Инвариантность относительно $x \rightarrow -x$ и $x \rightarrow x + x_0$ позволяет рассматривать решения, четные по x :

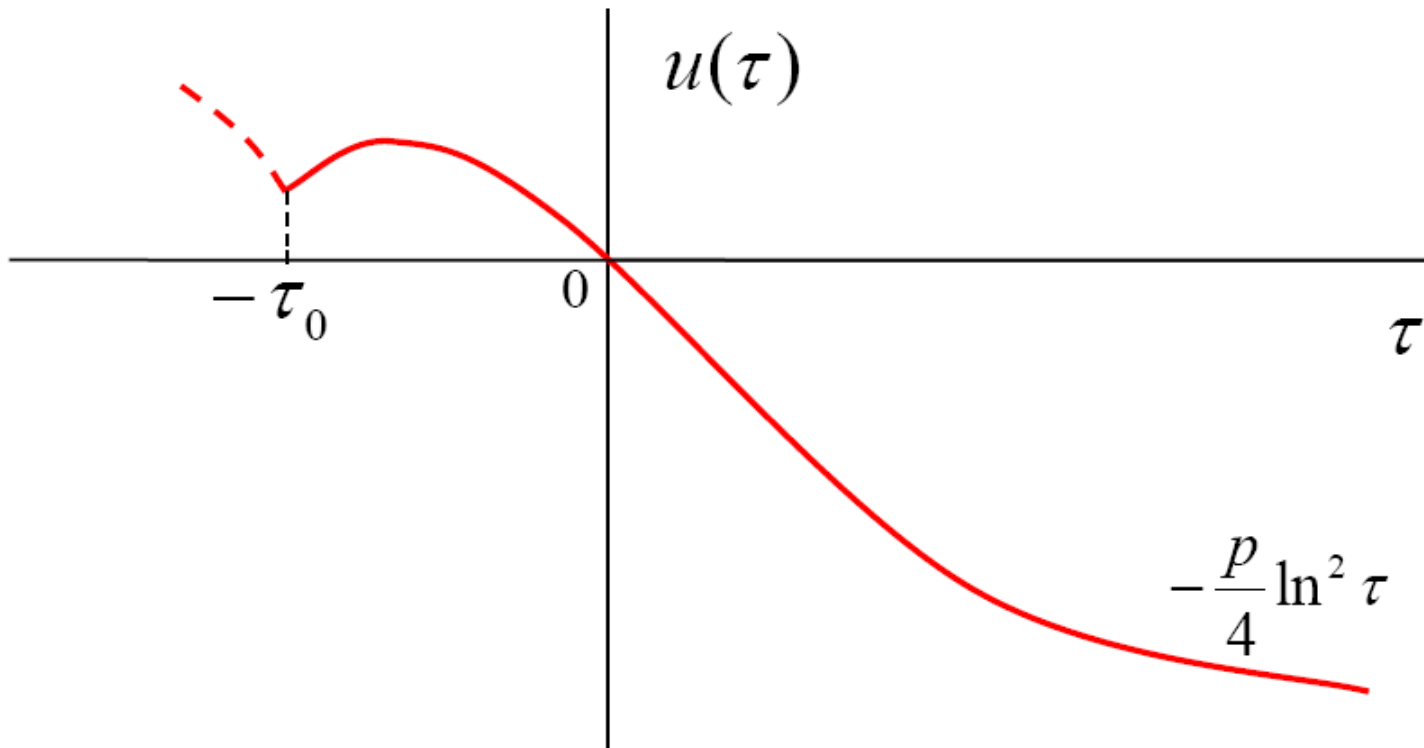


$$u''_{xx} + (u'_x)^2 - \tilde{\gamma}u'_x + pu = 0$$

При $\tilde{\gamma} > 0$ инвариантность $x \rightarrow -x$ нарушается и периодическое решение становится растущим:



Универсальные асимптотики



Вблизи точки $-\tau_0$

$$u(\tau) = C_1(\tau + \tau_0)^{1+2\gamma} + C_2$$

При больших τ имеется асимптотика

$$u(\tau) = -\frac{1}{4} p \ln^2 \tau, \quad \tau \gg 1$$

порождающая лог-нормальный хвост

$$W(g) \sim \frac{1}{g} \exp \left\{ -\frac{p}{4} (\ln g - \ln g_c)^2 \right\}, \quad g \rightarrow 0$$

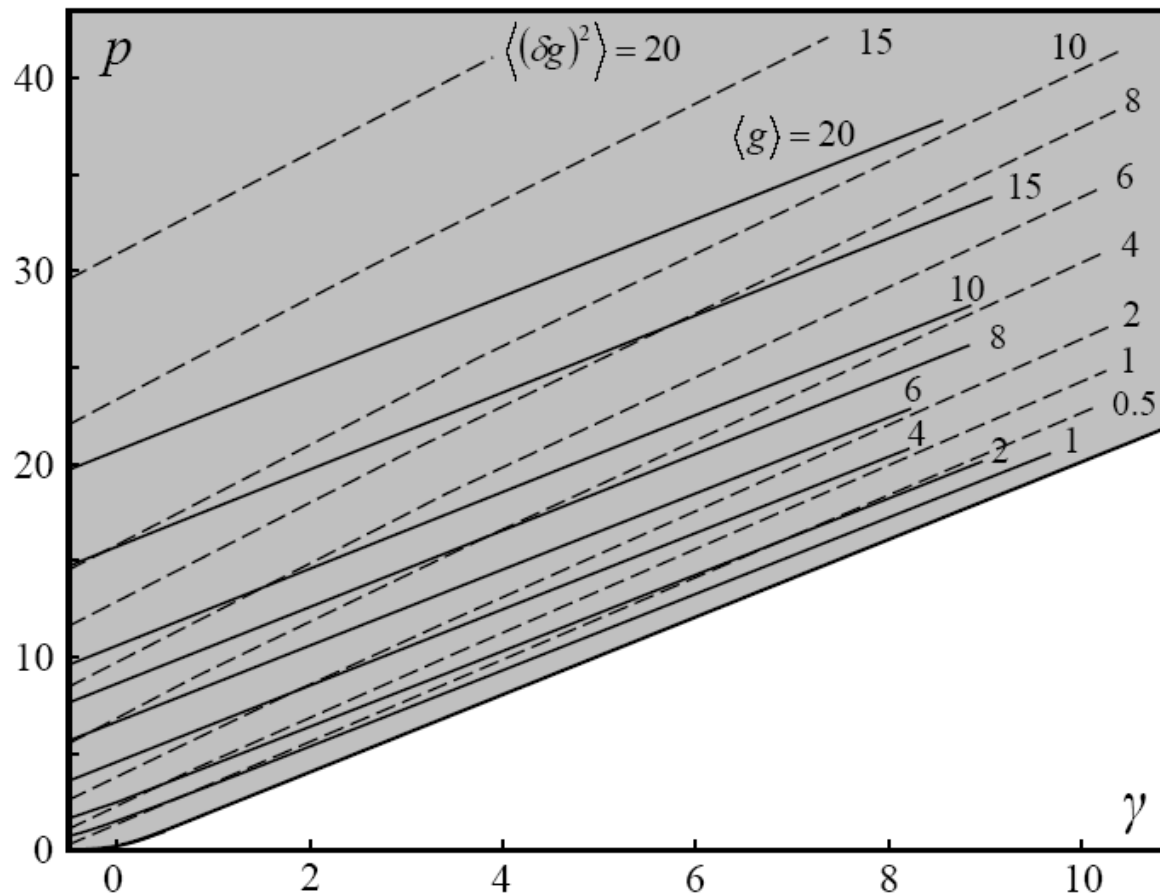
Сингулярность

$$u(\tau) \sim (\tau + \tau_0)^{1+2\gamma}$$

определяет экспоненциальное поведение при больших g :

$$W(g) \sim g^{-2-2\gamma} \exp(-\tau_0 g)$$

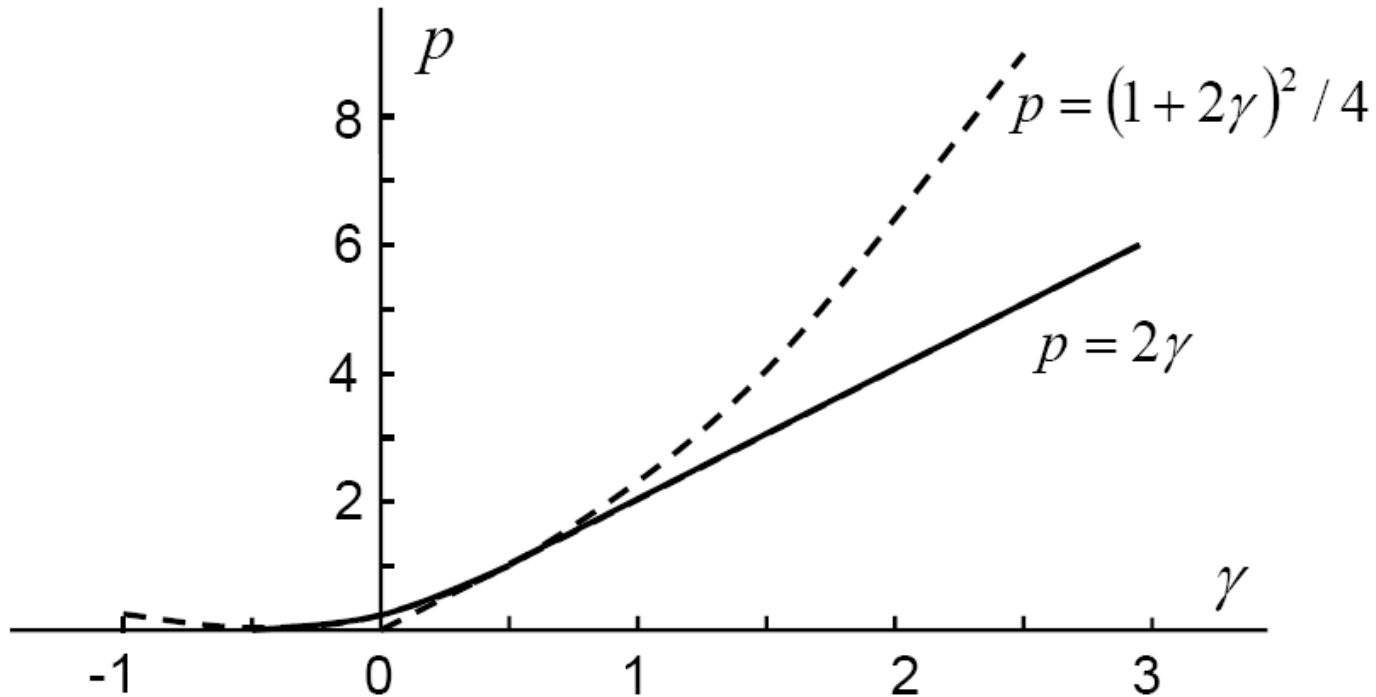
Фазовая диаграмма при $\tau_0 = 1$



При $p \gg 1$, $\gamma \ll p$ имеем

$$\langle g \rangle = p - 2\gamma - \frac{2}{3}, \quad \langle (\delta g)^2 \rangle = \frac{2}{3} \left(p - \frac{8}{3}\gamma - \frac{38}{45} \right)$$

Нижняя граница



При $p \rightarrow 2\gamma$ имеем $B_1^2 \sim B_2 \rightarrow 0$.

При $p \rightarrow (1 + 2\gamma)^2 / 4$ имеем $B_1 \sim B_2 \rightarrow 0$.

Окрестность прямой $p = 2\gamma$

Поскольку

$$B_1 = -\langle g \rangle, \quad 2B_2 = \langle (\delta g)^2 \rangle$$

то уравнение

$$(p - 2\gamma)B_1 + \tau_0 B_1^2 + 2\tau_0 B_2 = 0$$

переписывается в виде

$$p - 2\gamma = \tau_0 |B_1| + 2\tau_0 B_2 / |B_1| \geq 0$$

и дает неравенство

$$p \geq 2\gamma$$

как необходимое условие физического решения.

Полагая $p = 2\gamma + \epsilon$, имеем

$$\hat{L}u \equiv \tau(\tau+1)u'' - p\tau u' + pu = -\tau(\tau+1)u'^2 - \epsilon\tau u'$$

Уравнение $\hat{L}u = 0$ имеет решение $u_0(\tau) = A\tau$ и правую часть можно учесть итерационным образом:

$$\hat{L}\delta u = -A^2(\tau^2 + \tau) - \epsilon A\tau$$

Для разрешимости уравнения правая часть должна быть ортогональна к решению сопряженного уравнения $\hat{L}^+v_0 = 0$:

$$0 = (v_0, \hat{L}\delta u) = -A^2(v_0, \tau^2 + \tau) - \epsilon A(v_0, \tau)$$

Отсюда $A \sim \epsilon$, $\delta u \sim \epsilon^2$, так что

$$B_1 \sim \epsilon, \quad B_2 \sim \epsilon^2$$

и коэффициенты исчезают при приближении к прямой $p = 2\gamma$

Окрестность кривой $p = (1 + 2\gamma)^2 / 4$

В линейном по u приближении имеем гипергеометрическое уравнение

$$\tau(\tau + 1)u''_{\tau\tau} - (\alpha + \beta + 1)u'_{\tau} + \alpha\beta u = 0$$

параметры которого

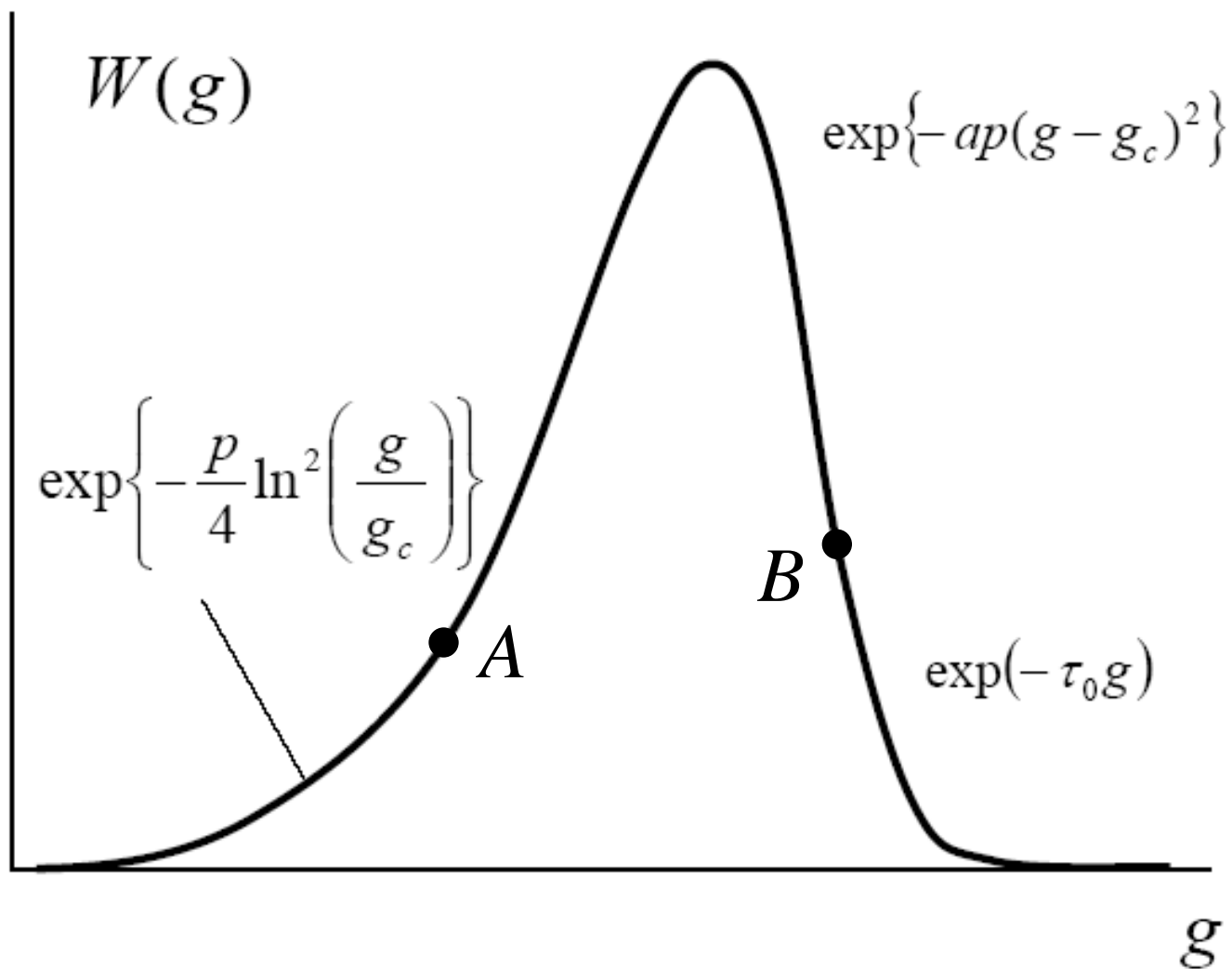
$$\alpha, \beta = \frac{(1 + 2\gamma) \pm \sqrt{(1 + 2\gamma)^2 - 4p}}{2}$$

совпадают на указанной кривой. Его решение имеет асимптотики

$$u(\tau) = \begin{cases} C \left[-\alpha\beta\tau + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2} \tau^2 + \dots \right], & \tau \ll 1 \\ C \left[\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\beta)} \tau^{-\beta} + \frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\beta)} \tau^{-\alpha} \right], & \tau \gg 1 \end{cases}$$

Комбинация $C\Gamma(\alpha-\beta)$ определяется условиями сшивки при $\tau \sim 1$ и остается постоянной в пределе $\alpha \rightarrow \beta$, так что $C \rightarrow 0$.

Металлический и диэлектрический режимы



Металлический режим

Предполагая, что для коэффициентов разложения в металлическом режиме справедлива иерархия

$$B_1 \gg B_2 \gg B_3 \gg \dots$$

получим при больших p и произвольных γ (кроме $2\gamma \approx p$)

$$B_n \sim p / \tau_0^n$$

так что

$$u(\tau) = pF(\tau / \tau_0)$$

В обратном преобразовании Лапласа для больших p

$$W(g) = \frac{\tau_0}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dx \exp \{ pF(x) + \tau_0 gx \}$$

достаточно разложить $F(x)$ до второго порядка.

Диэлектрический режим

Реализуется при $p \ll 1$, $\gamma = -1/2$. Линеаризуя уравнение

$$\tau(\tau + 1) [u'' + u'^2] - 2\gamma\tau u' + pu = 0$$

и отбрасывая малый член pu , имеем решение

$$u(\tau) = A \ln(\tau + 1)$$

которое при малых A сохраняется в области $\tau \gg 1$, где можно заменить $\tau(\tau + 1)$ на τ^2 . Тогда имеется точное решение

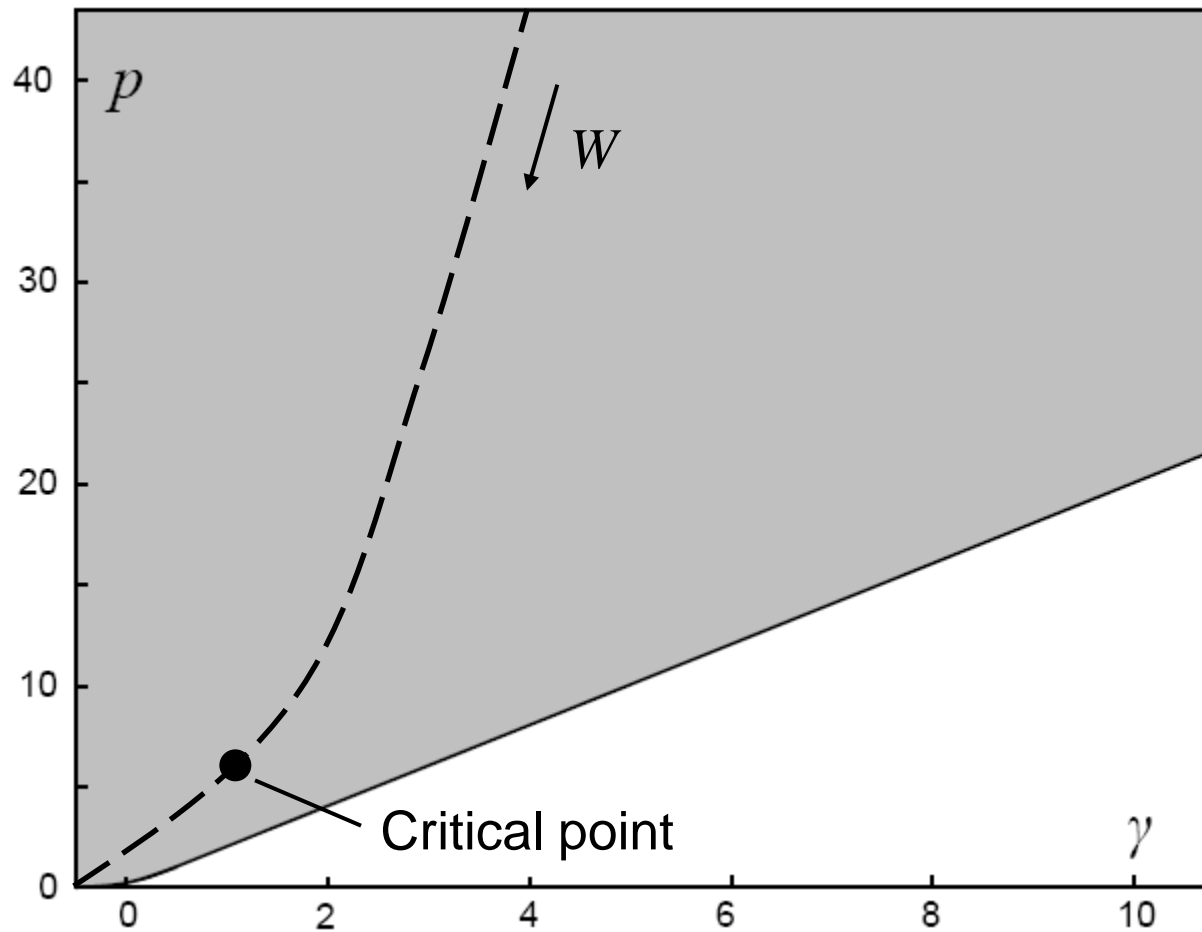
$$u(x) = -\frac{1}{4}p(\ln \tau - x_0)^2 + \frac{1}{2}$$

Заменяя τ на $\tau + 1$ и устраняя постоянный член выбором x_0 , имеем результат

$$u(x) = -(p/4) \ln^2(\tau + 1) - \sqrt{p/2} \ln(\tau + 1)$$

соответствующий лог-нормальному распределению.

$$(p, \gamma) \rightarrow (L/\xi, L_z/L)$$



Обратное преобразование Лапласа

Численная реализация обратного преобразования Лапласа производится путем рациональной аппроксимации с последующим разложением на простые дроби

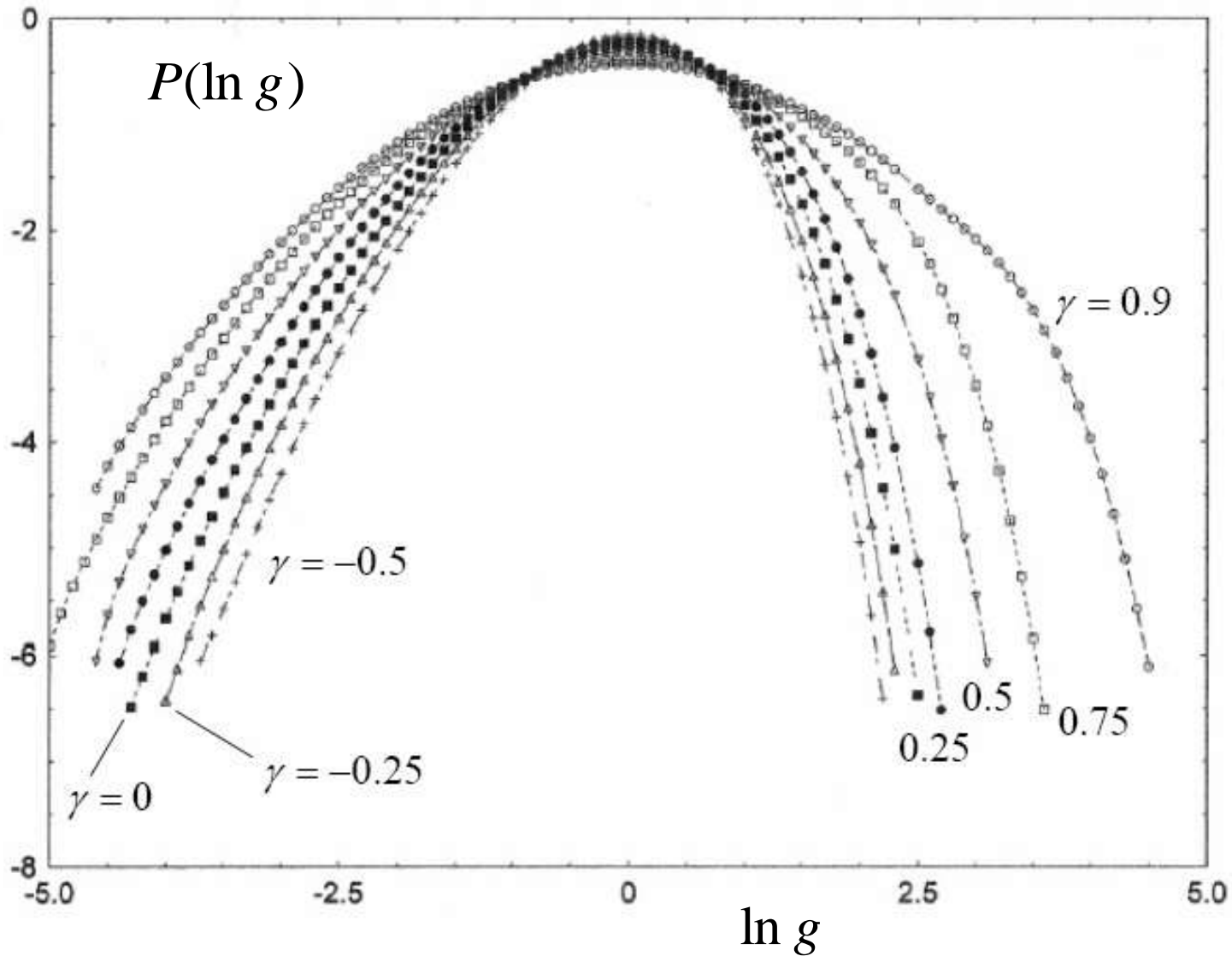
$$F(\tau) = \frac{P_M(\tau)}{Q_N(\tau)} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\tau - \tau_i}$$

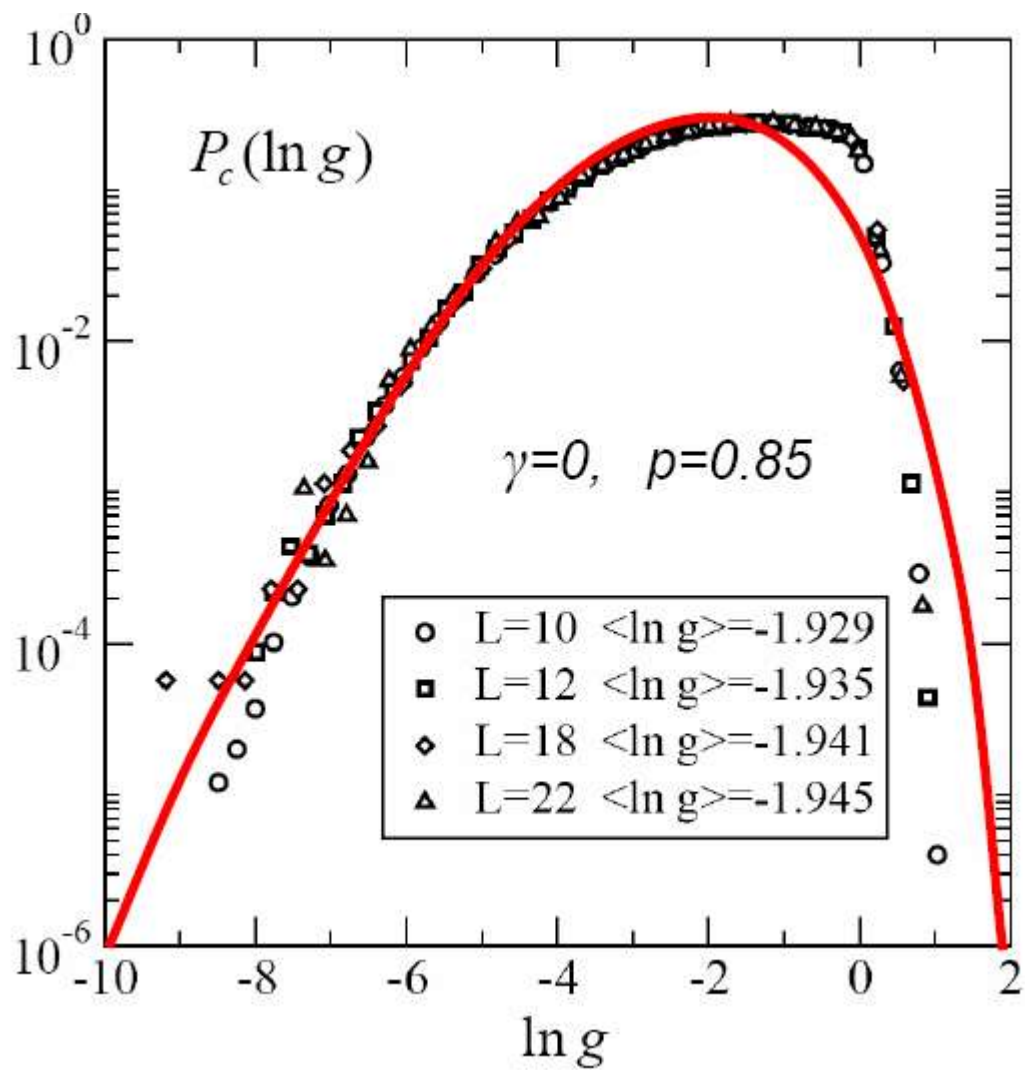
где $P_M(\tau)$ и $Q_N(\tau)$ – полиномы степени M и N .

После этого $W(g)$ представляется в виде

$$W(g) = \sum_{i=1}^N A_i \exp\{\tau_i g\}$$

Зависимость от γ при $p=2$







Причины возникновения сингулярности:

- (а) Используется определение Эконому-Соукоулиса;
- (б) Из-за отсутствия полупрозрачных границ система сильно взаимодействует с окружением; термодинамический предел относится к системе в целом, а не к изучаемому образцу.

Однопараметрический скейлинг для распределения в целом

Подтверждается численными экспериментами путем исследования т.н. «персенталей»

К. Slevin, Т. Ohtsuki, Р. Markoš, Phys. Rev. B **67**, 155106 (2003)

и различных средних $\langle g \rangle$, $\langle \rho \rangle$, $\langle \ln g \rangle$

К. Slevin, Т. Ohtsuki, Р. Markoš, Phys. Rev. Lett. **86**, 3594 (2001)

The percentile, g_q , is defined by the relation

$$q = \int_0^{g_q} p_L(g) dg.$$

By definition (186), the probability that $g < g_q$, equals to q (Fig. 58).