

Флуктуации плотности в однокомпонентных жидкостях

А. В. Мокшин

Казанский (Приволжский) федеральный
университет,
Институт физики,
кафедра вычислительной физики

XV Конференция молодых ученых “Проблемы физики твердого тела и высоких давлений”,
16-26 сентября 2016 г.

Содержание

1. Динамический структурный фактор;
2. Теоретические модели;
3. Сопоставление с экспериментальными данными.

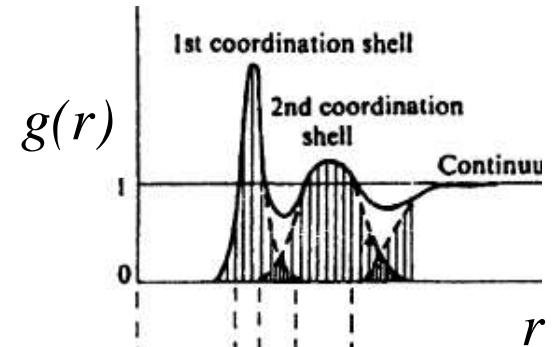
Структура

Статический структурный фактор $S(k)$:

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \rho \int \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) [g(\mathbf{r}) - 1] d\mathbf{r},$$

$\rho = \frac{N}{V}$ - количественная плотность,

$g(\mathbf{r})$ - функция радиального распределения частиц.



В случае неупорядоченной системы имеем

$$S(k) = 1 + \frac{4\pi\rho}{k} \int_0^{\infty} r [g(r) - 1] \sin(kr) dr =$$
$$= 1 - \frac{4\pi\rho}{k} \frac{d}{dk} \int_0^{\infty} [g(r) - 1] \cos(kr) dr.$$

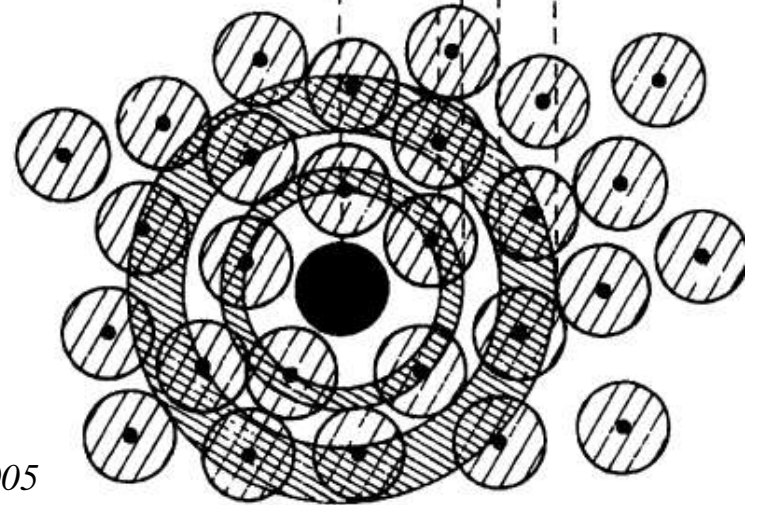
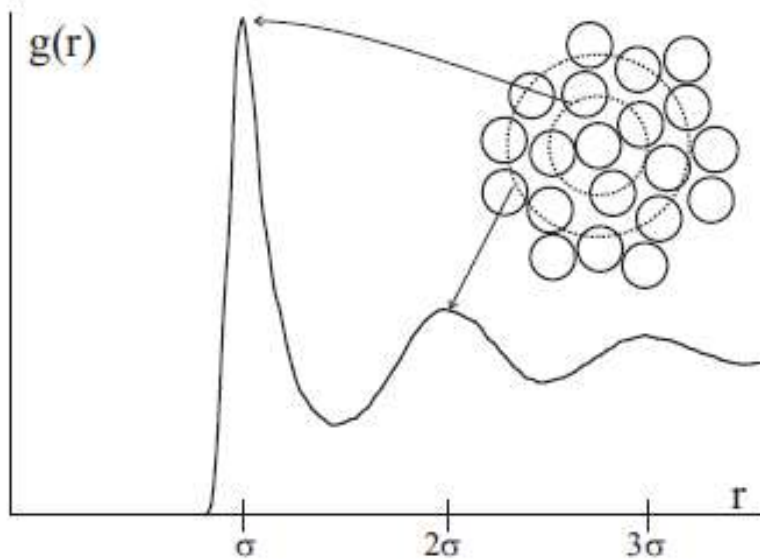


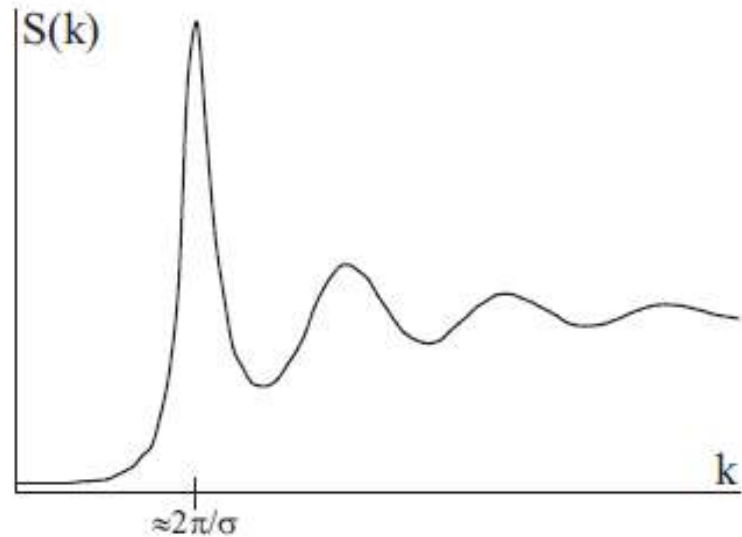
Fig. is from K. Binder, W. Kob, *Glassy materials & disordered solids*, 2005

Структура

Функция радиального
распределения частиц (2D)

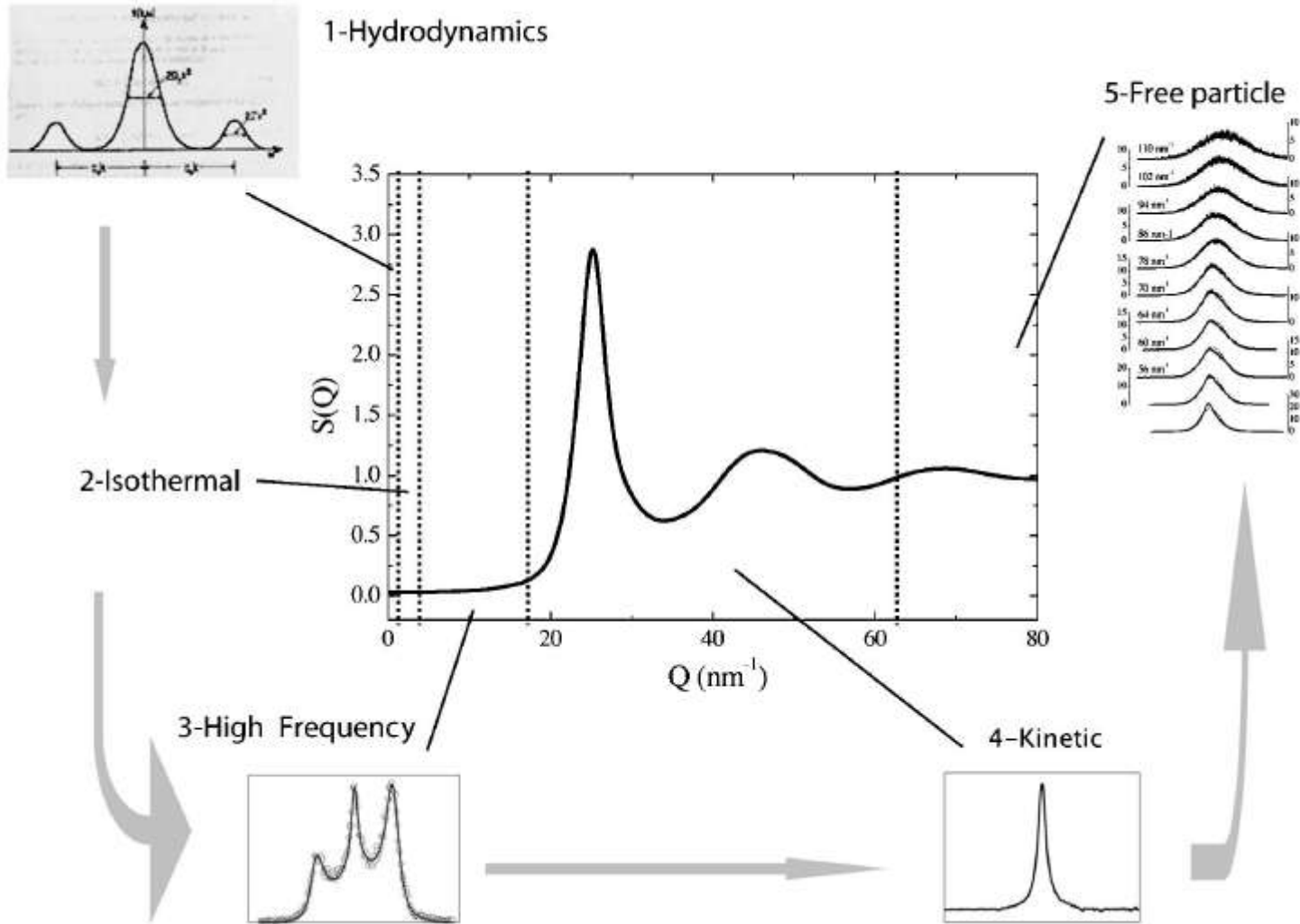


Статический структурный
фактор
(измеряется на эксперименте)



σ - эффективный размер частицы.

Структура ↔ Динамика



T. Scopigno et al., *Rev. Mod. Phys.* 77, 881 (2005).

Динамика

Динамический структурный фактор $S(k, \omega)$

нейтроны:

$$I(k, \omega) \approx \sigma_{coh} \underline{S(k, \omega)} + \sigma_{incoh} S_{inc}(k, \omega)$$

интенсивность рассеяния

рентгеновские
лучи:

$$I(k, \omega) \propto S(k, \omega)$$

$$\underline{S(k, \omega)} = \frac{S(k)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F(k, t) dt,$$

$F(k, t)$ - функция рассеяния

ТГц частотная область

Динамика

$$F(k, t) = \frac{\langle \delta\rho_k^*(0) \delta\rho_k(t) \rangle}{\langle |\delta\rho_k(0)|^2 \rangle}$$

- временная корреляционная функция (ВКФ),

где $S(k) = \langle |\delta\rho_k(0)|^2 \rangle = \int S(k, \omega) d\omega,$

$$\delta\rho_k = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} = \sum \int d\vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r})$$

- динамическая переменная,

локальная плотность

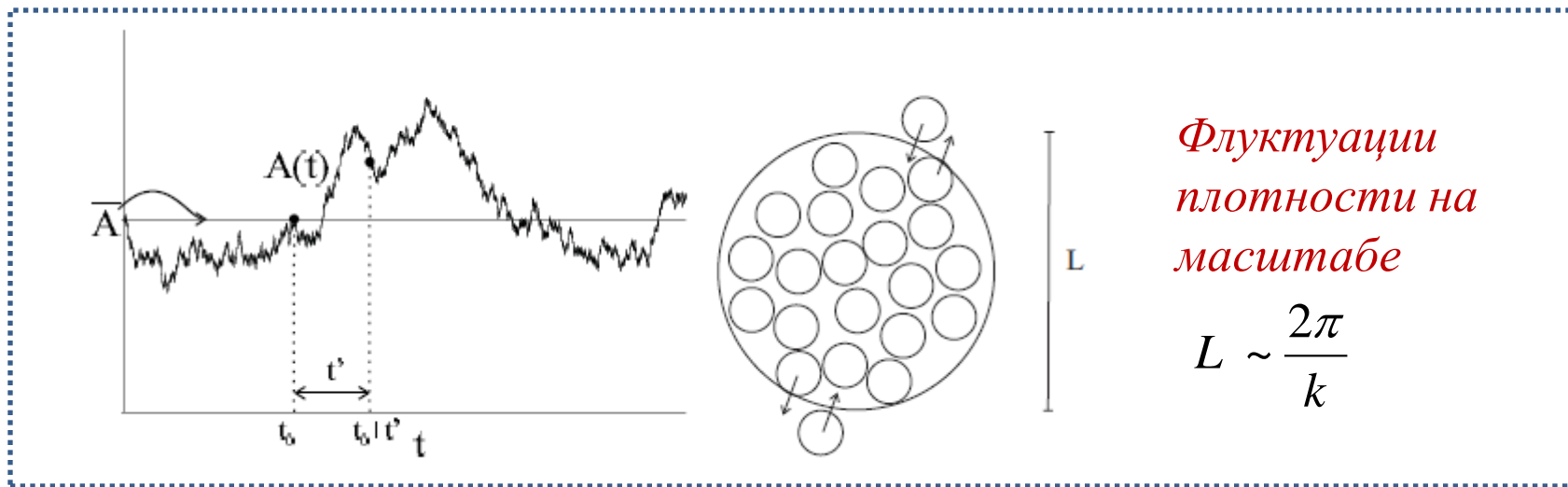


Рис. D. R. Reichman, P. Charbonneau, cond-mat (2005).

Динамика

Характеризация спектров

Sum rules

$$(-i)^n \omega^{(n)}(k) = (-1)^n \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^n S(k, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(k, \omega) d\omega} = \left. \frac{d^n F(k, t)}{dt^n} \right|_{t=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \int_{-\infty}^{\infty} S(k, \omega) d\omega = S(k),$$

$$\Omega_1^2(k) = \omega^{(2)}(k),$$

$$\Omega_2^2(k) = \frac{\omega^{(4)}(k)}{\omega^{(2)}(k)} - \omega^{(2)}(k),$$

$$\Omega_3^2(k) = \frac{\omega^{(6)}(k)\omega^{(2)}(k) - (\omega^{(4)}(k))^2}{\omega^{(4)}(k)\omega^{(2)}(k) - (\omega^{(2)}(k))^3},$$

$$\Omega_4^2(k) = \frac{1}{\Omega_1^2(k)\Omega_2^2(k)\Omega_3^2(k)} \left\{ \omega^{(8)}(k) - \Omega_1^2(k) \right.$$

$$\times \left[\left(\Omega_1^2(k) + \Omega_2^2(k) \right)^3 + 2\Omega_2^2(k)\Omega_3^2(k) \left(\Omega_1^2(k) + \Omega_2^2(k) \right) \right.$$

$$\left. \left. + \Omega_2^2(k)\Omega_3^4(k) \right] \right\},$$

$$\underline{\omega^{(1)}, \omega^{(3)}, \omega^{(5)}, \dots = 0.}$$

Динамика

Характеризация спектров

1. Нормировка экспериментальных спектров $S(k, \omega)$ [отн. ед. \leftrightarrow абс. ед.];

$$S(k) = \int S(k, \omega) d\omega \text{ and } \omega_{\text{un}}^{(1)}(k) = \int \omega^2 S(k, \omega) d\omega$$

2. Автокоррелятор плотности:

$$F(k, t) = F(k, 0) + \left| \dot{F}(k, t) \right|_{t=0} \cdot t + \left| \ddot{F}(k, t) \right|_{t=0} \cdot \frac{t^2}{2} + \dots$$

3. Частотные параметры: $[\Omega_n^2(k)] = 1c^{-2}$

$$\Omega_1^2(k) = \frac{k_B T}{m} \frac{k^2}{S(k)}, \quad \Omega_2^2(k) = 3\Omega_1^2(k)S(k) + \frac{N}{mV} \int dr g(r) [1 - \cos(kr)] \nabla_i^2 u(r) - \Omega_1^2(k),$$

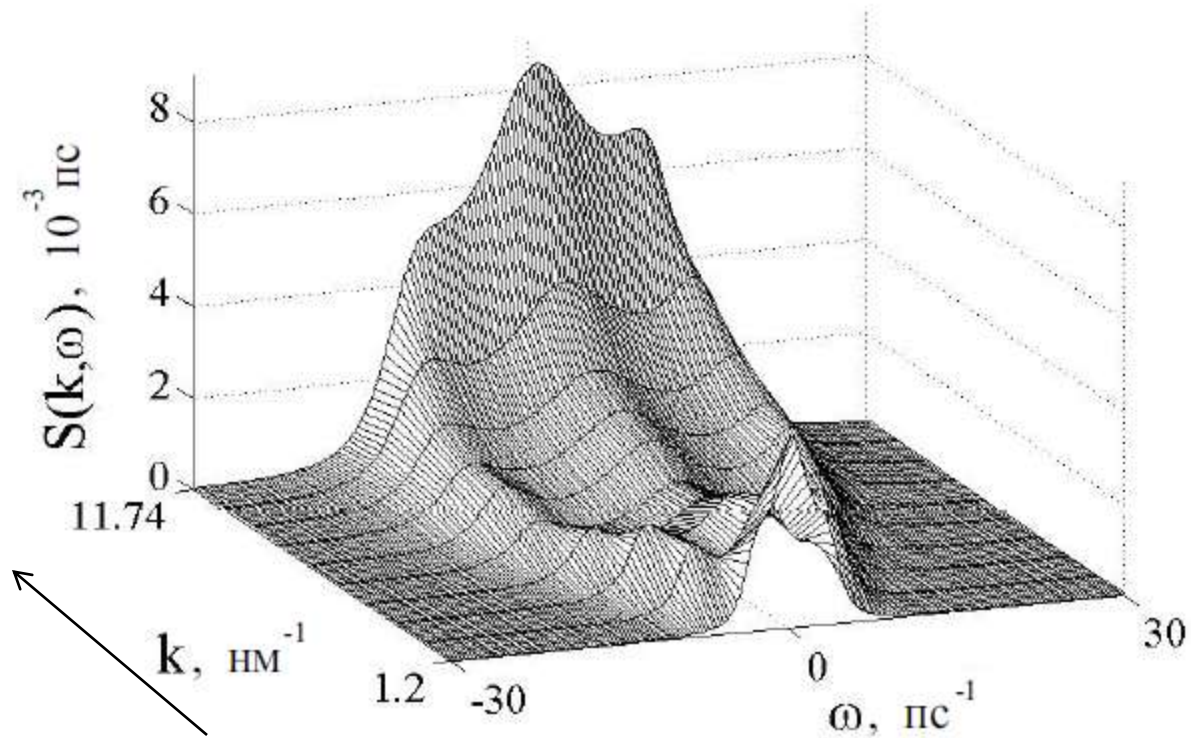
$$\Omega_3^2(k) = \frac{\omega^{(6)}(k) - \Omega_1^2(k)[\Omega_1^2(k) + \Omega_2^2(k)]}{\Omega_1^2(k)\Omega_2^2(k)}, \quad \omega^{(6)}(k) = 15 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2 k^4 + \frac{k_B T}{m^2} k^2 \frac{N}{V} \int dr g(r) \nabla_i^2 u(r) +$$

$$+ 6 \frac{k_B T}{m^2} k \frac{N}{V} \int dr g(r) \nabla_i^3 u(r) \sin(kr) + 2 \frac{N}{m^2 V} \int dr g(r) [\nabla \nabla_i u(r)]^2 [1 - \cos(kr)] +$$

$$+ \left(\frac{N}{mV} \right)^2 \int dr dr' g_3(r, r') [1 + \cos(k(r - r')) - \cos(kr - kr')] (\nabla \nabla_i u(r)) (\nabla' \nabla_i' u(r')),$$

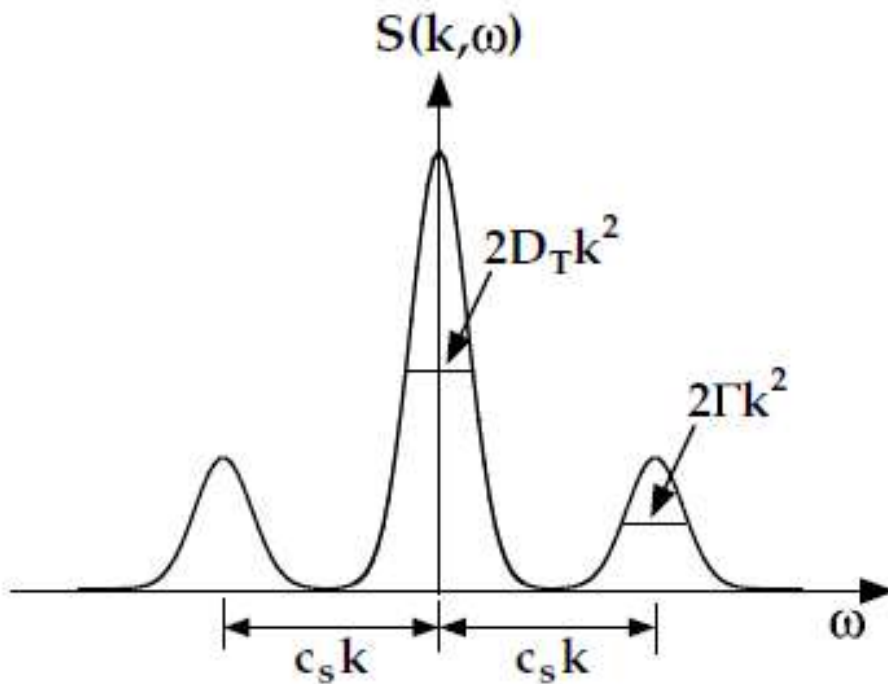
$$\Omega_4^2(k) = \frac{\omega^{(8)}(k) - \Omega_1^2(k)[(\Omega_1^2(k) + \Omega_2^2(k))^3 + 2\Omega_2^2(k)\Omega_3^2(k)(\Omega_1^2(k) + \Omega_2^2(k)) + \Omega_2^2(k)\Omega_3^4(k)]}{\Omega_1^2(k)\Omega_2^2(k)\Omega_3^2(k)}.$$

Динамика



Динамический структурный фактор жидкого калия при $T=354$ К ($T_M=336$ К)

Гидродинамический предел



Rayleigh-Mandelstam-Brillouin triplet

$$\frac{\rho(Q, t)}{\rho(Q)} = \left[\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) e^{-D_T Q^2 t} + \frac{1}{\gamma} e^{-\Gamma Q^2 t} \cos c_s Q t \right]$$

$$\frac{S(Q, \omega)}{S(Q)} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{2D_T Q^2}{\omega^2 + (D_T Q^2)^2} \right] + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\Gamma Q^2}{(\omega + c_s Q)^2 + (\Gamma Q^2)^2} + \frac{\Gamma Q^2}{(\omega - c_s Q)^2 + (\Gamma Q^2)^2} \right],$$

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}, \quad D_T = \frac{\kappa}{\rho m C_P},$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\rho m} \left[\frac{4}{3} \eta_s + \eta_B + \frac{(\gamma - 1)\kappa}{c_P} \right].$$

Динамика (при высоких k)

Высокие k - переход к режиму свободной движущейся частицы

Динамический структурный фактор:
$$S(k, \omega) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T k^2}} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2k_B T k^2}\right)$$

Функция рассеяния:
$$F(k, t) = \exp\left(-\frac{k_B T k^2 t^2}{2m}\right)$$

$$\Omega_1^2(k) = \frac{k_B T}{m} k^2, \quad \Omega_2^2(k) = 2\Omega_1^2(k), \quad \Omega_3^2(k) = 3\Omega_1^2(k), \quad \dots, \quad \Omega_n^2(k) = n\Omega_1^2(k).$$

Параметр негауссовости:

$$\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu+1} \frac{\Omega_{\nu+1}^2}{\Omega_\nu^2} - 1;$$

$\alpha_\nu = 0$ - гауссова релаксация,

$\alpha_\nu \neq 0$ - эффекты негауссовости.

Динамика при конечных k

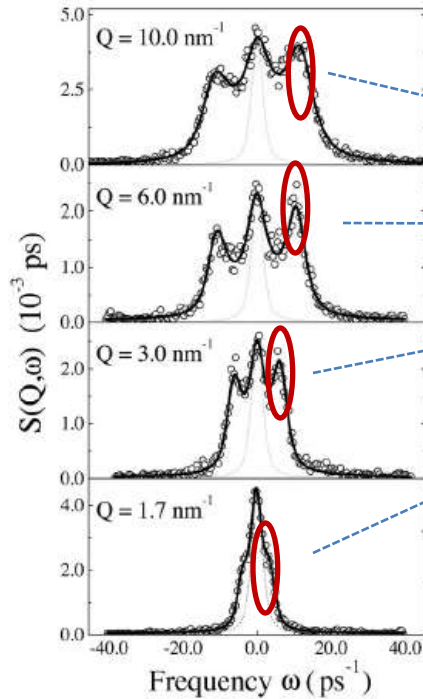


FIG. 19. High-resolution IXS measurements in liquid potassium (open circles) (Monaco *et al.*, 2004). The continuous line is the line-shape description according to a multiple relaxation memory function model (see text).

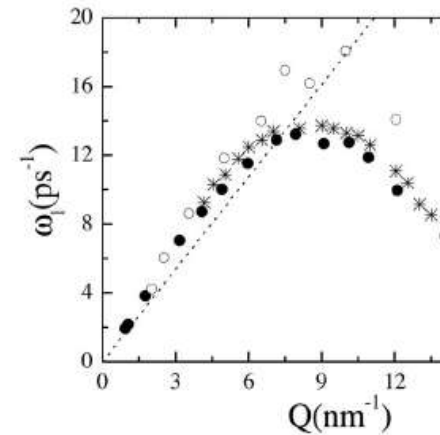


FIG. 21. Dispersion curves (maxima of the current correlation function) measured by INS [open circles (Bove *et al.*, 2003), stars (Cabrillo *et al.*, 2002)] and IXS [full circles (Monaco *et al.*, 2004)].

$$G_J(k, t) = \frac{(J^L(k, 0), J^L(k, t))}{(J^L(k, 0), J^L(k, 0))},$$

$$S(k) \Delta_1(k) \tilde{G}_J(k, \omega) = \omega^2 S(k, \omega).$$

IXS in liquid potassium above T_m

Динамика (при конечных k)

Обобщенная гидродинамика

(k -, ω -зависимые коэффициенты переноса)

$$\ddot{F}(k, t) + \Omega_1^2(k)F(k, t) + \Omega_1^2(k)\Omega_2^2(k) \int_0^t M_2(k, t - \tau) \dot{F}(k, \tau) d\tau = 0, \quad (\text{GLE})$$

$$S(k, \omega) = \frac{S(k)}{\pi} \frac{\Omega_1^2(k)\Omega_2^2(k)\tilde{M}'_2(k, \omega)}{[\omega^2 - \Omega_1^2(k) - \omega\Omega_2^2(k)\tilde{M}''_2(k, \omega)]^2 + [\omega\Omega_2^2(k)\tilde{M}'_2(k, \omega)]^2},$$

где $\Omega_1^2(k) = \frac{k_B T}{m} \frac{k^2}{S(k)}$, $M_2(k, t)$ - ВКФ локальной энергии, функция памяти

$$\Omega_2^2(k) = 3\Omega_1^2(k)S(k) + \frac{N}{mV} \int dr g(r) [1 - \cos(kr)] \nabla_l^2 u(r) - \Omega_1^2(k),$$

Динамика при конечных k

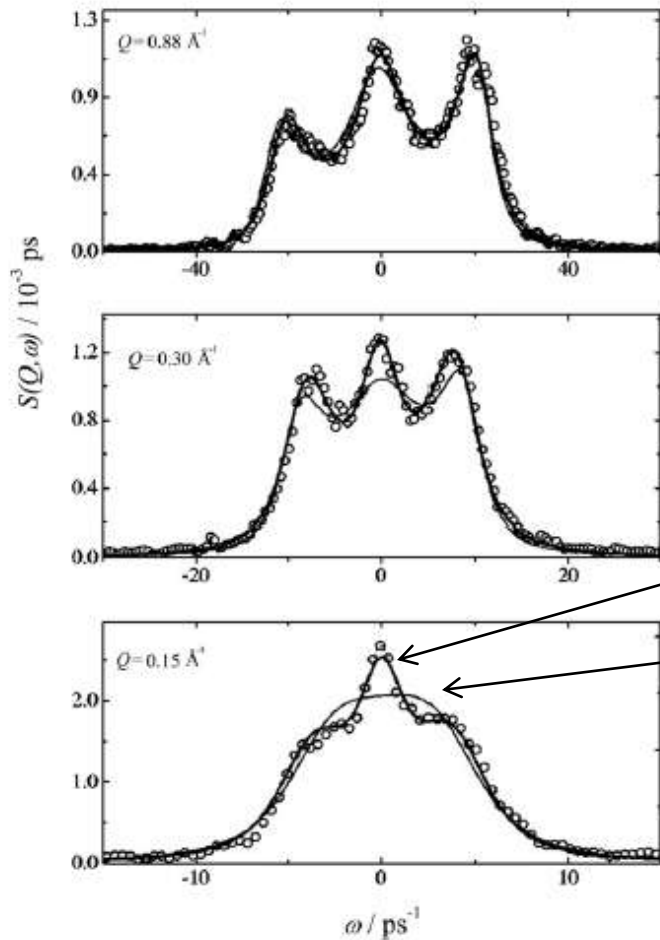
$$1. \quad \underbrace{\Omega_2^2(k)M_2(k,t)}_{\Delta_L M_L(k,t)} = \underbrace{2(\eta_L / \rho m)k^2 \delta(t) + (\gamma - 1)\Omega_1^2(k)e^{-D_T k^2 t}}_{\Delta_{th} M_{th}(k,t)} \quad \text{hydrodynamics}$$

$$2. \quad M_L(k,t) = e^{-t/\tau_L(k)} \quad \text{viscoelastic model (single-exponential)}$$

$$3. \quad M_L(k,t) = \alpha(k)e^{-t/\tau_1(k)} + [1 - \alpha(k)]e^{-t/\tau_2(k)} \quad \text{two relaxation time model}$$

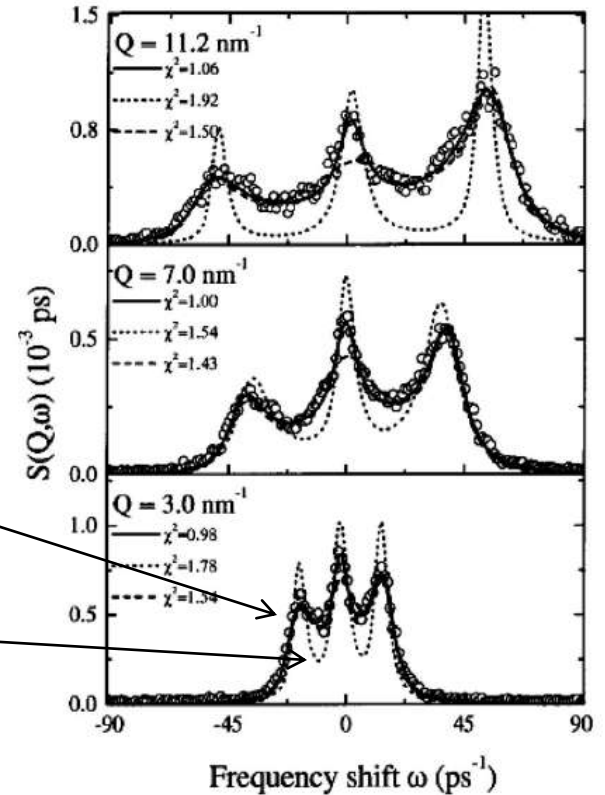
Treatment of IXS & INS experiment is to fit $M_L(k,t)$ (4 fitting parameters)

Динамика при конечных k



two
relaxation
time model

v/el



IXS spectra for liquid Li

Some selected spectra of an IXS investigation on molten sodium

Treatment of IXS & INS experiment is to fit $M_L(k, t)$ (4 fitting parameters)

T. Scopigno et al., Rev. Mod. Phys. 77, 881 (2005).

Динамика при конечных k

1. McGreevy-Mitchell's model:

$$F(k, t) = \frac{S(k)}{\pi} \left\{ \frac{\gamma(k) - 1}{\gamma(k)} \exp\left(-\frac{\sqrt{t^2 + \tau_1(k)^2} - \tau_1(k)}{\tau_2(k)}\right) + \frac{1}{\gamma(k)} \exp\left(-\frac{\sqrt{t^2 + \tau_3(k)^2} - \tau_3(k)}{\tau_4(k)}\right) \cos(v_s kt) \right\}.$$

$$S(k, \omega) = \frac{S(k)}{\pi} \left\{ \frac{\gamma(k) - 1}{\gamma(k)} \exp\left(\frac{\tau_1(k)}{\tau_2(k)}\right) \frac{\tau_1(k)^2}{\tau_2(k)} \frac{K_1(x)}{x} + \frac{1}{2\gamma(k)} \exp\left(\frac{\tau_3(k)}{\tau_4(k)}\right) \frac{\tau_3(k)^2}{\tau_4(k)} \left[\frac{K_1(y)}{y} + \frac{K_1(z)}{z} \right] \right\},$$

где $x = \tau_1(k)\sqrt{\omega^2 + 1/\tau_2(k)^2}$ и $y, z = \tau_3(k)\sqrt{(\omega \pm v_s k)^2 + 1/\tau_4(k)^2}$; и $K_1(\dots)$ представляет функцию Бесселя второго рода.

2. Singh-Tankeshwar's model:

$$F(k, t) = S(k) \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \operatorname{sech}(t/\tau_1) + \frac{1}{\gamma} \operatorname{sech}(t/\tau_2) \cos(\omega_0 t) \right],$$

$$S(k, \omega) = S(k) \frac{a\tau_1}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega\tau_1}{2}\right) + S(k) \frac{(1-a)\tau_2}{4} \left[\operatorname{sech}\left(\frac{\pi(\omega + \omega_0)\tau_2}{2}\right) + \operatorname{sech}\left(\frac{\pi(\omega - \omega_0)\tau_2}{2}\right) \right],$$

a, τ_1, τ_2 и ω_0 – есть модельные параметры.

Динамика при конечных k

1. Набор ортогональных переменных

$$A_0(k) = \sum_{j=1}^N e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_j}, \quad \frac{dA_0(t)}{dt} = i[\widehat{H}, A_0(t)] = i\widehat{L}A_0(t),$$

Ортогонализация Грама - Шмидта :

$$\mathbf{A} = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_\nu, \dots\}, \quad (A_\nu, A_\mu) = (A_\nu, A_\nu)\delta_{\nu,\mu}, \quad \nu, \mu = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_{\nu+1} = i\widehat{L}A_\nu + \Omega_\nu^2 A_{\nu-1}, \quad A_{-1} = 0, \quad A_0 \equiv A, \quad \Delta_0 = 1,$$

$$\Omega_\nu^2 = \frac{\langle |A_\nu|^2 \rangle}{\langle |A_{\nu-1}|^2 \rangle}$$

2. Принцип Н.Н. Боголюбова о сокращенном описании

(конечный набор динамических переменных);

Флуктуации плотности, флуктуации импульса, флуктуации энергии и потока энергии

(соответствие гидродинамике);

$$\mathbf{A}(k) = \{A_0(k), A_1(k), A_2(k), A_3(k), A_4(k)\}$$

Динамика при конечных k

$$S(k, \omega) = \frac{S(k)}{\pi} F[\Omega_1^2(k), \Omega_2^2(k), \dots, \Omega_j^2(k); \omega].$$

$$S(k, \omega) = \frac{S(k)}{2\pi} \frac{\Omega_1^2(k)\Omega_2^2(k)\Omega_3^2(k)}{\Omega_4^2(k) - \Omega_3^2(k)} \frac{[4\Omega_4^2(k) - \omega^2]^{1/2}}{\omega^6 + \mathcal{A}_1(k)\omega^4 + \mathcal{A}_2(k)\omega^2 + \mathcal{A}_3(k)},$$

$$\mathcal{A}_1(k) = \frac{\Omega_3^4(k) - \Omega_2^2(k)[2\Omega_4^2(k) - \Omega_3^2(k)]}{\Omega_4^2(k) - \Omega_3^2(k)} - 2\Omega_1^2(k),$$

$$\mathcal{A}_2(k) = \frac{\Omega_2^4(k)\Omega_4^2(k) - 2\Omega_1^2(k)\Omega_3^4(k) + \Omega_1^2(k)\Omega_2^2(k)[2\Omega_4^2(k) - \Omega_3^2(k)]}{\Omega_4^2(k) - \Omega_3^2(k)} + \Omega_1^4(k),$$

$$\mathcal{A}_3(k) = \frac{\Omega_1^4(k)\Omega_3^4(k)}{\Omega_4^2(k) - \Omega_3^2(k)}.$$

$$\Omega_1^2(k) = \frac{k_B T}{m} \frac{k^2}{S(k)}, \quad \Omega_2^2(k) = 3\Omega_1^2(k)S(k) + \frac{N}{mV} \int dr g(r)[1 - \cos(kr)]\nabla_i^2 u(r) - \Omega_1^2(k),$$

$$\begin{aligned} \Omega_3^2(k) &= \frac{\omega^{(6)}(k) - \Omega_1^2(k)[\Omega_1^2(k) + \Omega_2^2(k)]}{\Omega_1^2(k)\Omega_2^2(k)}, \quad \omega^{(6)}(k) = 15 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2 k^4 + \frac{k_B T}{m^2} k^2 \frac{N}{V} \int dr g(r) \nabla_i^2 u(r) + \\ &+ 6 \frac{k_B T}{m^2} k \frac{N}{V} \int dr g(r) \nabla_i^3 u(r) \sin(kr) + 2 \frac{N}{m^2 V} \int dr g(r) [\nabla \nabla_i u(r)]^2 [1 - \cos(kr)] + \\ &+ \left(\frac{N}{mV} \right)^2 \int dr dr' g_3(r, r') [1 + \cos(k(r - r')) - \cos(kr - kr')] (\nabla \nabla_i u(r)) (\nabla' \nabla_i' u(r')). \end{aligned}$$

Динамика при конечных k

Уравнение дисперсии:

$$s^3 + \frac{2\Omega_4(k)}{Q(k)}s^2 + \left[\Omega_1^2(k) + \frac{\Omega_2^2(k)(1+Q(k))}{Q(k)} \right] s + \frac{2\Omega_4(k)\Omega_1^2(k)}{Q(k)} = 0,$$

$$Q(k) = 2 \frac{\Omega_4^2(k)}{\Omega_3^2(k)} - 1,$$

С приближенными решениями [R.D. Mountain, Rev. Mod. Phys. 38, 419 (1966)]:

$$\begin{aligned} s_{1,2}(k) &= \pm i v_s k - \Gamma k^2, \\ s_3(k) &= -2 \frac{\Omega_4(k)}{\gamma Q(k)}. \end{aligned}$$

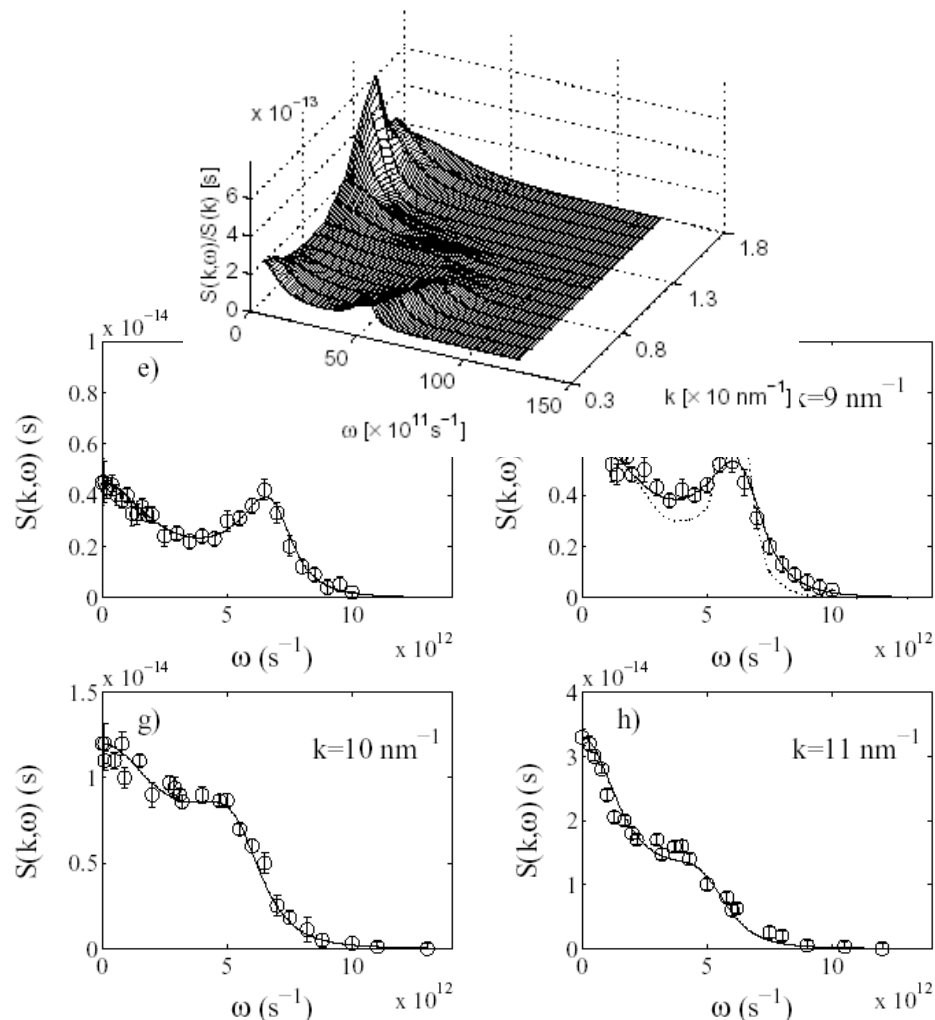
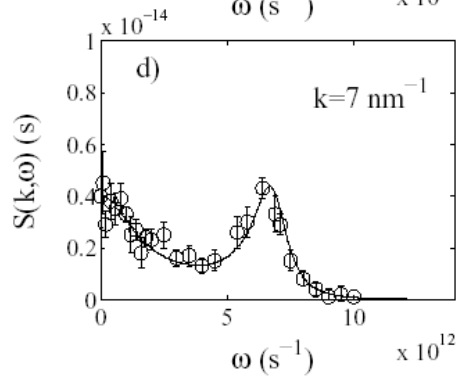
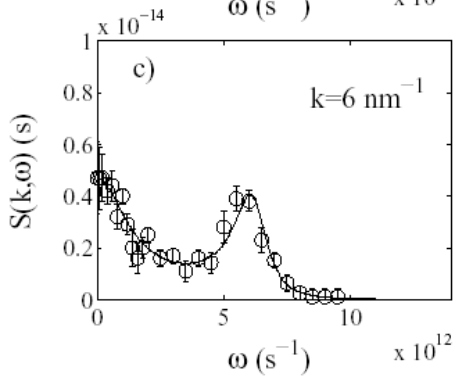
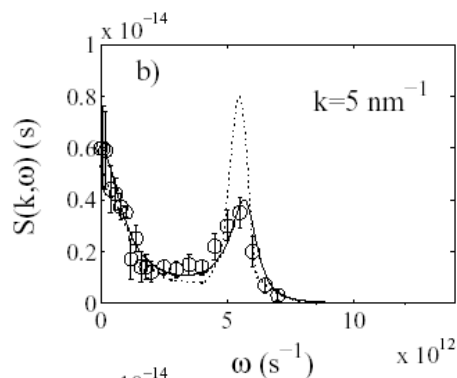
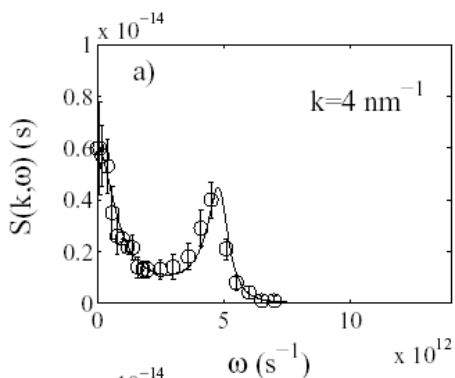
$$v_s = \sqrt{\gamma} v_T, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \Delta_1(k) = v_T^2 k^2,$$

$$\Gamma = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\Omega_4(k)}{Q(k)},$$

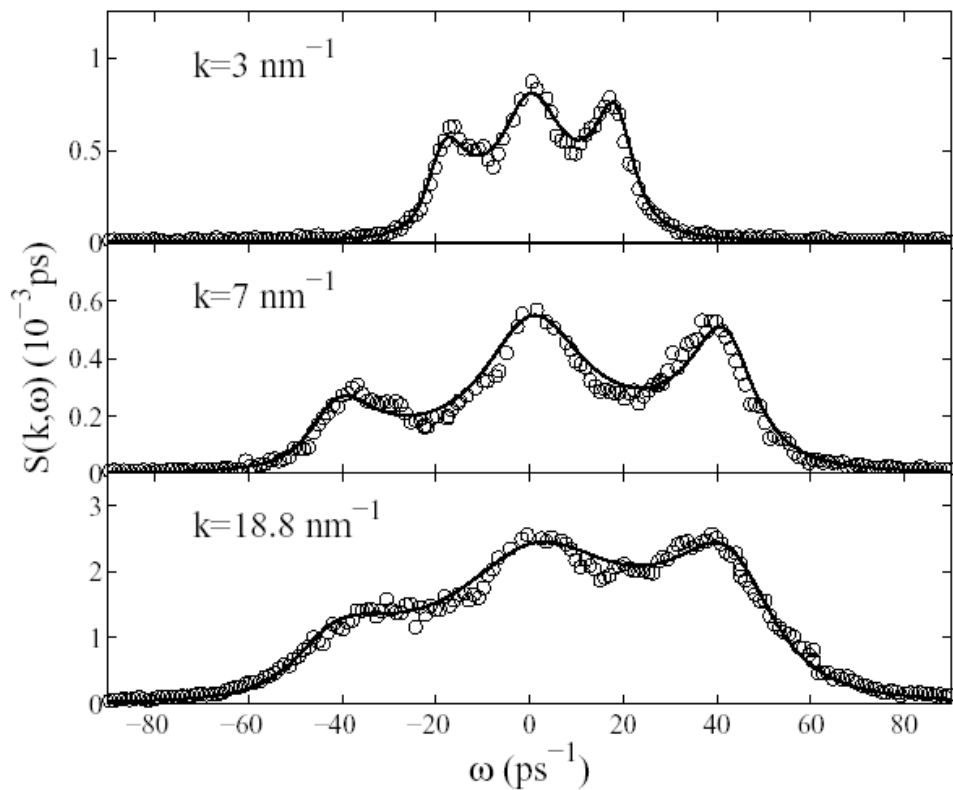
$$\gamma = 1 + \frac{\Omega_2^2(k)[1+Q(k)]}{\Omega_1^2(k)Q(k)},$$

Динамический структурный фактор жидкого цезия при $T=308\text{K}$ ($T_{\text{melt}}=302\text{K}$)

INS - Bodensteiner et al., 1992.



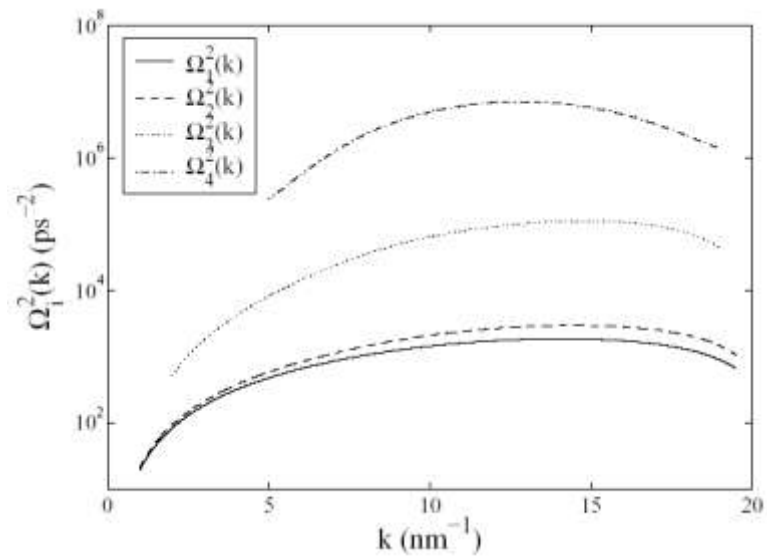
Динамический структурный фактор
жидкого лития при $T=475\text{K}$ ($T_{melt}=453.7\text{K}$)



IXS – T. Scopigno et al., 2001

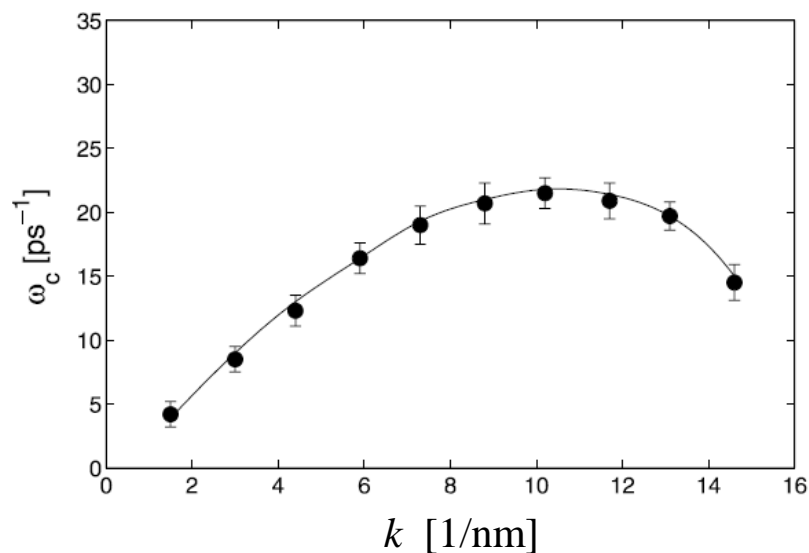
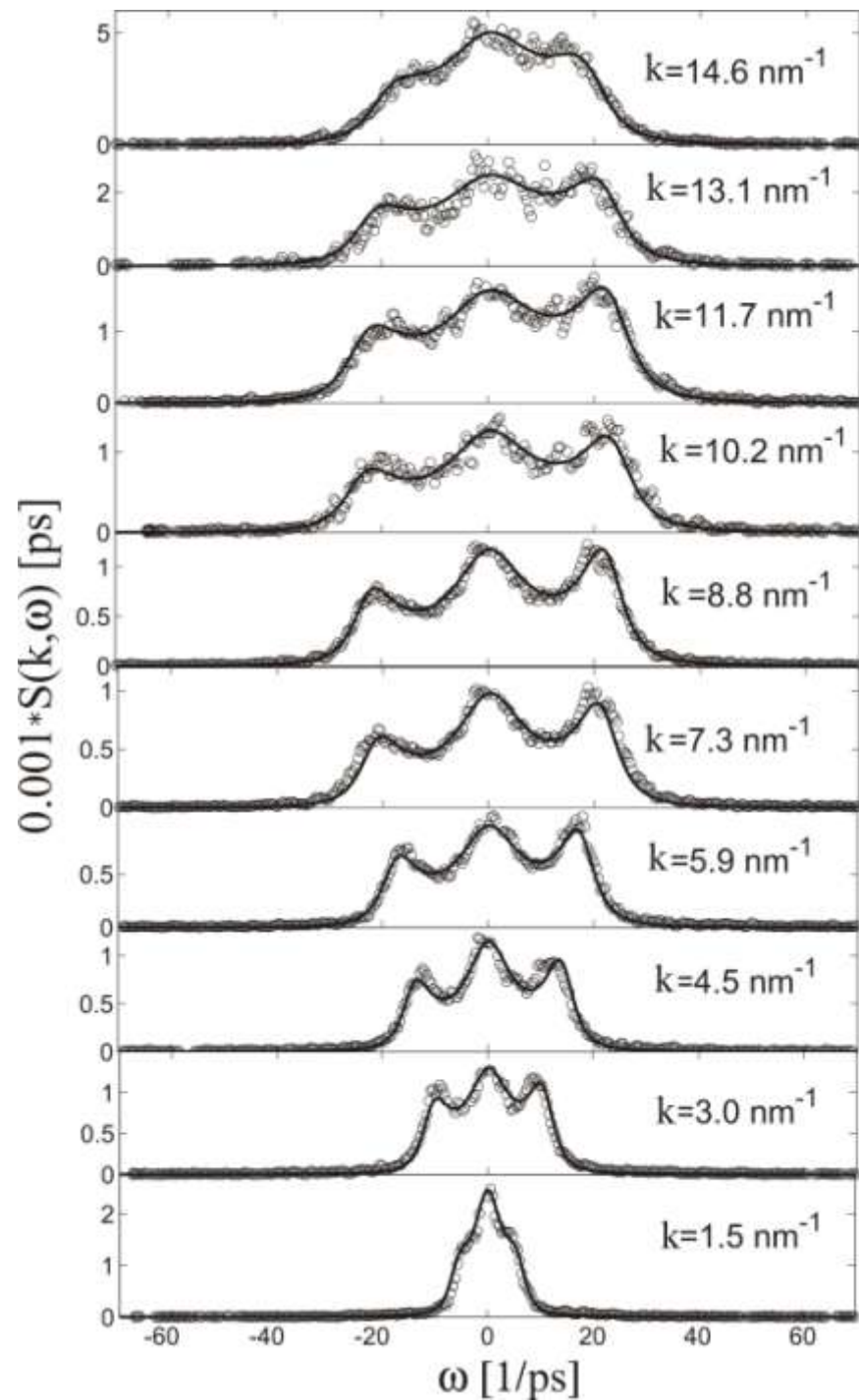
$$S_q(k, \omega) = \frac{\hbar\omega/k_B T}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} S(k, \omega),$$

$$E(k) \int R(k, \omega - \omega') S_q(k, \omega') d\omega$$



Динамический структурный
фактор жидкого натрия при
 $T=390\text{K}$ ($T_{melt}=371\text{K}$)

IXS – T. Scopigno et al., 2001



A.V. Mokshin, R.M. Yulmetyev, T. Scopigno, P. Hänggi,
J. Phys.: Condens. Matter **15**, 2235 (2003)

Динамический структурный фактор жидкого алюминия при температуре $T=973$ К

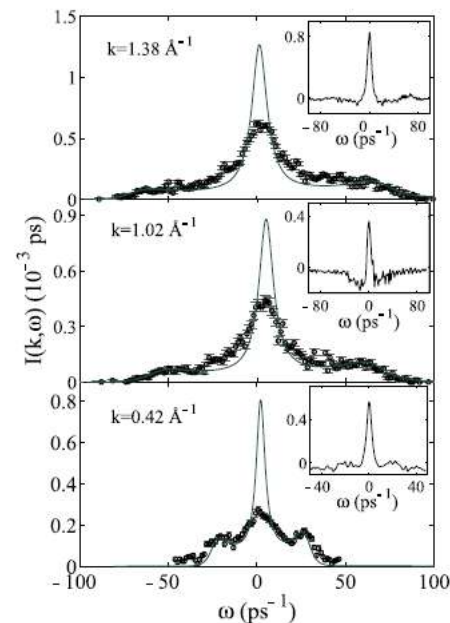
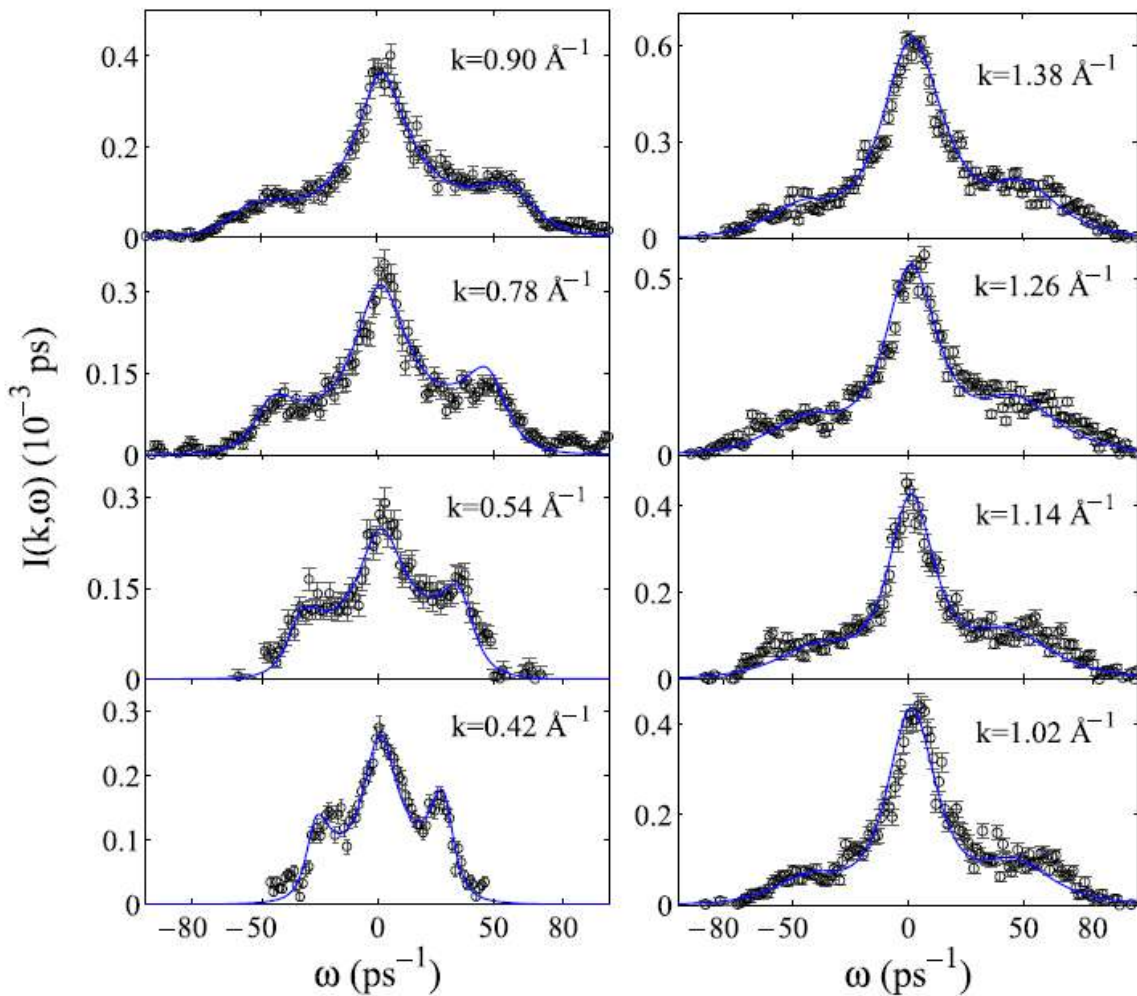


Figure 1. Main plots: the scattering intensity $I(k, \omega)$ of liquid aluminium at temperature $T = 973$ K for different wavenumbers. The solid lines present the molecular dynamics results convoluted with the experimental resolution and involving the detailed balance condition; open circles with error bars are the IXS data of [19]. Insets: the difference between molecular dynamics results and interpolated experimental data at the fixed k , i.e., $I_{MD}(k, \omega) - I_{IXS}(k, \omega)$, in the units 10^{-3} ps.

k (nm $^{-1}$)	$\delta_1(k)$	$\delta_2(k)$	$\delta_3(k)$	$\delta_4(k)$
4.2	2.008	1.357	3.787	0.935
5.4	2.043	1.484	2.839	0.926
7.8	2.105	1.344	2.455	0.915
9.0	2.466	1.301	2.310	0.934
10.2	2.890	1.376	1.926	0.964
11.4	2.866	1.504	1.680	0.920
12.6	2.581	1.465	1.723	0.920
13.8	2.519	1.239	1.929	0.957

IXS – T. Scopigno et al., 2003

Сопоставление с обобщенной гидродинамикой, вязкоупругой моделью и др.

Разложение $M_2(k, t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{M}_2(k, s) &= [s + \Omega_3^2(k) \tilde{M}_3(k, s)^{-1}] = \frac{s + \Omega_4^2(k) \tilde{M}_3(k, s)}{s^2 + \Omega_4^2(k) \tilde{M}_3(k, s) s + \Omega_3^2(k)}, & (a) \\ \tilde{M}_3(k, s) &= \frac{-s + \sqrt{s^2 + 4\Omega_4^2(k)}}{2\Omega_4^2(k)}. & (b) \end{aligned} \right.$$

$$\xi = \frac{s^2}{4\Omega_4^2}, \quad |\xi| \ll 1, \quad \Omega_4^2 \sim 10^{29} s^{-2}, \quad \omega < 10^{15} s^{-1} \quad (t > 10^{-15} s)$$

$$(b) \rightarrow \tilde{M}_3(s) = -\frac{s}{2\Omega_4^2} + \frac{1}{\Omega_4} + \frac{\xi}{2\Omega_4} - \frac{\xi^2}{8\Omega_4} + \dots \quad (k - \text{фиксировано})$$

$$\tilde{M}_2(k, s) = \sum_j \frac{A_j(k)}{s + \tau_j^{-1}(k)}, \quad A_j(k), \tau_j^{-1}(k) = f[\Omega_3^2(k), \Omega_4^2(k)],$$

$$M_2(k, t) = \sum_j A_j(k) e^{-t/\tau_j(k)}.$$

- **Спасибо за внимание!**

Динамика при конечных k

$$\frac{d}{dt} A_\nu(t) = -\Omega_{\nu+1}^2 \int_0^t A_\nu(\tau) \frac{\langle A_{\nu+1}(0)^* A_{\nu+1}(t-\tau) \rangle}{\langle |A_{\nu+1}(0)|^2 \rangle} d\tau + A_{\nu+1}(t)$$

функция памяти $(\nu+1)$ -го порядка

$$\frac{d}{dt} \varphi_\nu(t) = -\Omega_{\nu+1}^2 \int_0^t \varphi_{\nu+1}(t-\tau) \varphi_\nu(\tau) d\tau, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Omega_1^2 = \omega^{(2)},$$

$$\Omega_2^2 = \frac{\omega^{(4)}}{\omega^{(2)}} - \omega^{(2)},$$

$$\Omega_3^2 = \frac{\omega^{(6)} \omega^{(2)} - \omega^{(4)^2}}{\omega^{(4)} \omega^{(2)} - \omega^{(2)^3}};$$

$$\omega^{(2p)} = (-i)^p \left. \frac{d^p \varphi(t)}{dt^p} \right|_{t=0}, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$\hat{\varphi}_\nu(s) = \frac{1}{s + \Omega_{\nu+1}^2 \hat{\varphi}_{\nu+1}(s)}.$$

$$LT[\varphi(t)] = \tilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} \varphi(t)$$

преобразование Лапласа