

Вейвлеты в квантовой теории поля и статфизике

Алтайский М.В.
ИКИ РАН

XV конференция "Проблемы физики твердого тела и высоких давлений"
16-26 сентября 2016 г., пансионат Буревестник, г.Сочи

Рассматриваются аналитические аспекты применения непрерывного вейвлет-преобразования к задачам квантовой теории поля и статистической физики. Показано, что причиной расходимостей, возникающих при квантово-полевоом описании различных систем с континуальным числом степеней свободы, является неадекватный выбор пространства функций, а именно, соответствие функций Грина принципиально не измеримым, а следовательно, не физическим величинам. Любая физическая величина (поле) может быть измерена лишь в конечной области пространства, размеры которой определяются разрешением измерительного прибора, но никак не в точке. Введение конечного разрешения в определение квантового поля $\phi(x) \rightarrow \phi_a(x)$ посредством непрерывного вейвлет-преобразования приводит к незначительному изменению фейнмановской диаграмной техники, но делает все получаемые функции Грина конечными по построению.

References

- 1 M.V.Altaisky, Unifying renormalization group and the continuous wavelet transform, *Phys. Rev. D* **93**(2016) 105043
- 2 M.V.Altaisky and N.E.Kaputkina, Continuous wavelet transform in quantum field theory, *Phys. Rev. D* **88**(2013)025015
- 3 F.Bulut and W.Polyzou, Wavelets in field theory, *Phys. Rev. D* **87**(2013)116011
- 4 M.V.Altaisky, Quantum field theory without divergences, *Phys. Rev. D* **81**(2010)125003

- Вейвлет-преобразование

- Вейвлет-преобразование
- Масштабно-зависимые функции $\phi_a(x)$

- Вейвлет-преобразование
- Масштабно-зависимые функции $\phi_a(x)$
- Квантово-полевое описание систем с континуальным числом степеней свободы

- Вейвлет-преобразование
- Масштабно-зависимые функции $\phi_a(x)$
- Квантово-полевое описание систем с непрерывным числом степеней свободы
- Модель Изинга, модель Гинзбурга-Ландау

- Вейвлет-преобразование
- Масштабно-зависимые функции $\phi_a(x)$
- Квантово-полевое описание систем с континуальным числом степеней свободы
- Модель Изинга, модель Гинзбурга-Ландау
- Теория скалярного поля ϕ^4 в многомасштабном формализме

- Вейвлет-преобразование
- Масштабно-зависимые функции $\phi_a(x)$
- Квантово-полевое описание систем с континуальным числом степеней свободы
- Модель Изинга, модель Гинзбурга-Ландау
- Теория скалярного поля ϕ^4 в многомасштабном формализме
- Квантовая теория поля без расходимостей

- Вейвлет-преобразование
- Масштабно-зависимые функции $\phi_a(x)$
- Квантово-полевое описание систем с непрерывным числом степеней свободы
- Модель Изинга, модель Гинзбурга-Ландау
- Теория скалярного поля ϕ^4 в многомасштабном формализме
- Квантовая теория поля без расходимостей
- Ренормализационная группа в многомасштабном формализме

- Вейвлет-преобразование
- Масштабно-зависимые функции $\phi_a(x)$
- Квантово-полевое описание систем с непрерывным числом степеней свободы
- Модель Изинга, модель Гинзбурга-Ландау
- Теория скалярного поля ϕ^4 в многомасштабном формализме
- Квантовая теория поля без расходимостей
- Ренормализационная группа в многомасштабном формализме
- Калибровочные теории

[Carey, 1976, Bull. Austr. Math. Soc. **15**, 12; Duflo and Moore, 1976, J. Func. Anal., **21**, 209]:

Пусть \mathcal{H} – гильбертово пространство, G – локально-компактная группа Ли, действующая на \mathcal{H} , $d\mu(\nu)$, $\nu \in G$ – левоинвариантная мера на G , а $U(\nu)$ ее представление. $\forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{C_g} \int_G U(\nu) |g\rangle d\mu(\nu) \langle g | U^*(\nu) | \phi \rangle$$

$|g\rangle \in \mathcal{H}$ – базисный вейвлет, удовлетворяющий условию $C_g = \frac{1}{\|g\|^2} \int_G |\langle g | U(\nu) | g \rangle|^2 d\mu(\nu) < \infty$. $\langle g | U^*(\nu) | \phi \rangle$ – коэффициенты вейвлет-разложения

$$G : x' = ax + b, x, b \in \mathbb{R}^d, a \in \mathbb{R}_+,$$

– аффинная группа в \mathbb{R}^d , а

$$U(a, b)g(x) = \frac{1}{a^d} g\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

ее (L^1 -нормированное) представление. Тогда

$$\phi_a(b) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{a^d} \overline{g\left(\frac{x-b}{a}\right)} \phi(x) d^d x$$

– вейвлет коэффициенты функции $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ по отношению к базисному вейвлету g .

Непрерывное вейвлет-преобразование

Аффинная группа в \mathbb{R}^d

Пусть

$$G : x' = aR(\theta)x + b, x, b \in \mathbb{R}^d, a \in \mathbb{R}_+, \theta \in SO(d),$$

группа аффинных преобразований в \mathbb{R}^d . Пусть

$$U(a, b, \theta)g(x) = \frac{1}{a^d}g\left(R^{-1}(\theta)\frac{x-b}{a}\right)$$

– представление группы G (в L^1 -норме). Тогда

$$\phi_{a,\theta}(b) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{a^d}g\left(R^{-1}(\theta)\frac{x-b}{a}\right)\phi(x)d^d x$$

называются вейвлет-коэффициентами поля $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ по отношению к вейвлету g .

Обратное вейвлет-преобразование

Функция $\phi(x)$ может быть восстановлена из набора коэффициентов вейвлет-разложения по формуле:

$$\phi(x) = \frac{1}{C_g} \int \frac{1}{a^d} g \left(R^{-1}(\theta) \frac{x-b}{a} \right) \phi_{a\theta}(b) \frac{da d^d b}{a} d\mu(\theta)$$

Константа нормировки C_g легко вычисляется с помощью преобразования Фурье:

$$C_g = \int_0^\infty |\tilde{g}(aR^{-1}(\theta)k)|^2 \frac{da}{a} d\mu(\theta) = \int |\tilde{g}(k)|^2 \frac{d^d k}{|k|^d} < \infty.$$

Для изотропных базисных вейвлетов

$$C_g = \int_0^\infty |\tilde{g}(ak)|^2 \frac{da}{a} = \int |\tilde{g}(k)|^2 \frac{d^d k}{S_d |k|^d},$$

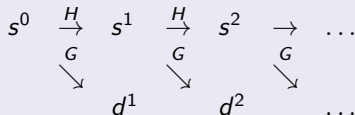
где $S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ площадь единичной сферы в \mathbb{R}^d .

Discrete Wavelet Transform

Discrete analog of CWT :

$$f(x) = \sum_{j,k} d_k^j 2^{-j} \psi(2^{-j}x - k) + \text{Res}$$

Pyramidal scheme ($V_N \subset V_{N-1} \subset \dots \subset V_0$, $V_k \setminus V_{k-1} = W_k$)



Scaling equation:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n), \quad \psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$$

Low- and High- pass filters

$$(Ha)_k = \sum_n h_{n-2k} a_n, \quad (Ga)_k = \sum_n g_{n-2k} a_n, \quad g_n = (-1)^n h_{1-n+2N}$$

Квантово-полевое описание систем с континуальным числом степеней свободы

Пусть $\phi(x, \cdot)$ – случайное поле, $x \in \mathbb{R}^d$. Плотность вероятности конфигурации $\phi(x)$ определяется весовым множителем $\rho[\phi] = e^{-\frac{F[\phi]}{k_B T}} \equiv e^{-S[\phi]}$. Статистические моменты полевой конфигурации получаются путем вариационного дифференцирования производящего функционала

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_c = \frac{\delta W[J(x)]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

где

$$e^{W[J]} \equiv Z[J(x)] = \int \exp \left(-S[\phi] + \int \phi(x) J(x) dx \right) \mathcal{D}\phi$$

Если система квантовая, то "действие" $S[\phi]$ представляет собой потенциал взаимодействия – функционал Ландау.

Если система классическая, описывается уравнением Ланжевена $\dot{\phi} = U[\phi] + \xi(\cdot)$, то происходит удвоение полей:

$$\delta \left(\dot{\phi} - U[\phi] + \dots \right) \rightarrow \hat{\phi} \left(\dot{\phi} - U[\phi] + \dots \right) \quad (\text{Martin, Siggia, Rose 1977})$$

Переход квантовой системы из начального состояния в конечное описывается с помощью S -матрицы $|q_{+\infty}^{(out)}\rangle = \hat{S}|q_{-\infty}^{(in)}\rangle$:

$$\langle q_t^{(out)} | q_T^{(in)} \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[t, T, [q]]}$$

где $S[t, T, [q]] = \int L(q, \dot{q}) dt$ – функционал действия, вычисленный на заданной траектории $q(t)$.

Пример. Гармонический осциллятор под действием вынуждающей силы ($\hbar \equiv 1$):

$$\langle q_t^{(out)} | q_T^{(in)} \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{i \int dt \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2 + F(t)q(t) \right]}$$

Под интегралом стоит быстро осциллирующая функция. Замена вещественного времени на мнимое $\tau = it$ приводит к регулярному выражению

$$W_E[F] = \int \mathcal{D}q e^{-\int d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2 - Fq \right]},$$

совпадающему со статсуммой

Масштабнозависимые функции

Scale-dependent functions: $L^2(\mathbb{R}^d)$ or not $L^2(\mathbb{R}^d)$?

- Для локализации частицы в интервале Δx требуется передача импульса порядка $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$. $\phi(x)$ в точке x не имеет экспериментального смысла. Интерпретируемыми являются лишь вакуумные средние произведений полей в некоторой области вблизи x

Масштабнозависимые функции

Scale-dependent functions: $L^2(\mathbb{R}^d)$ or not $L^2(\mathbb{R}^d)$?

- Для локализации частицы в интервале Δx требуется передача импульса порядка $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$. $\phi(x)$ в точке x не имеет экспериментального смысла. Интерпретируемыми являются лишь вакуумные средние произведений полей в некоторой области вблизи x
- Если система, описываемая $\phi(x)$, была изначально приготовлена в интервале $(x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2})$, то вероятность ее последующей регистрации в данном интервале меньше единицы, так как зависит и от интенсивности взаимодействия прибора с измеряемой системой, и от отношения их масштабов.

Масштабнозависимые функции

Scale-dependent functions: $L^2(\mathbb{R}^d)$ or not $L^2(\mathbb{R}^d)$?

- Для локализации частицы в интервале Δx требуется передача импульса порядка $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$. $\phi(x)$ в точке x не имеет экспериментального смысла. Интерпретируемыми являются лишь вакуумные средние произведений полей в некоторой области вблизи x
- Если система, описываемая $\phi(x)$, была изначально приготовлена в интервале $(x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2})$, то вероятность ее последующей регистрации в данном интервале меньше единицы, так как зависит и от интенсивности взаимодействия прибора с измеряемой системой, и от отношения их масштабов.
- **Полнота измерения.** Вероятность регистрации объекта, достоверно приготовленного в интервале Δx , с помощью измерительного прибора с фиксированным разрешением a меньше единицы. Совокупность всех возможных измерений, получаемых перестройкой разрешения a измерительного прибора, с достоверностью ведет к регистрации объекта
$$\int |\phi_a(x)|^2 d\mu(a, x) = 1$$

$L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\phi(x) \equiv \langle x | \phi \rangle, \quad \int |\phi(x)|^2 d^d x = 1$$

Стандартная теория: используется разложение по представлению группы сдвигов: $\phi(x) = \int e^{-ikx} \tilde{\phi}(k) \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$

Производящий функционал

$$W[J] = \mathcal{N} \int e^{-\int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - J\phi \right]} \mathcal{D}\phi$$

Масштабно-зависимые поля

$$\phi_{a\theta}(x) \equiv \langle x, \theta, a; g | \phi \rangle, \quad \int |\phi_{a,\theta}(x)|^2 d\mu(a, \theta, x) = 1$$

$$\phi(x) = \frac{1}{C_g} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \tilde{g}(ak) \tilde{\phi}_a(k), \quad \tilde{\phi}_a(k) = \overline{\tilde{g}(ak)} \tilde{\phi}(k)$$

Масштабно-зависимые поля

$$\phi_a(x) \equiv \langle x, a; g | \phi \rangle$$

$$\phi(x) = \frac{1}{C_g} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx} \tilde{g}(ak) \tilde{\phi}_a(k), \quad \tilde{\phi}_a(k) = \overline{\tilde{g}(ak)} \tilde{\phi}(k)$$

Производящий функционал

$$\begin{aligned} Z_W[J_a] = & \mathcal{N} \int \exp \left[-\frac{1}{2} \int \phi_{a_1}(x_1) D(a_1, a_2, x_1 - x_2) \phi_{a_2}(x_2) \frac{da_1 d^d x_1}{a_1} \times \right. \\ & \times \frac{da_2 d^d x_2}{a_2} - \frac{\lambda}{4!} \int V_{x_1, \dots, x_4}^{a_1, \dots, a_4} \phi_{a_1}(x_1) \cdots \phi_{a_4}(x_4) \frac{da_1 d^d x_1}{a_1} \times \\ & \left. \times \frac{da_2 d^d x_2}{a_2} \frac{da_3 d^d x_3}{a_3} \frac{da_4 d^d x_4}{a_4} + \int J_a(x) \phi_a(x) \frac{dad^d x}{a} \right] \mathcal{D}\phi_a, \end{aligned}$$

где $D(a_1, a_2, x_1 - x_2)$ и $V_{x_1, \dots, x_4}^{a_1, \dots, a_4}$ – вейвлет-образы обратного пропагатора и потенциала взаимодействия

- Каждое поле $\tilde{\phi}(k)$ заменяется масштабно-зависимым полем $\tilde{\phi}(k) \rightarrow \tilde{\phi}_a(k) = \tilde{g}(ak)\tilde{\phi}(k)$.

- Каждое поле $\tilde{\phi}(k)$ заменяется масштабно-зависимым полем $\tilde{\phi}(k) \rightarrow \tilde{\phi}_a(k) = \tilde{g}(ak)\tilde{\phi}(k)$.
- Интегрирование по каждому импульсу сопровождается интегрированием по логарифму масштаба:

$$\frac{d^d k}{(2\pi)^d} \rightarrow \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{da}{a}.$$

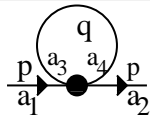
- Каждое поле $\tilde{\phi}(k)$ заменяется масштабнo-зависимым полем $\tilde{\phi}(k) \rightarrow \tilde{\phi}_a(k) = \tilde{g}(ak)\tilde{\phi}(k)$.
- Интегрирование по каждому импульсу сопровождается интегрированием по логарифму масштаба:

$$\frac{d^d k}{(2\pi)^d} \rightarrow \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{da}{a}.$$

- Каждая вершина заменяется своим вейвлет-образом; для вершины степени N это приводит к мультипликативному фактору $\prod_{i=1}^N \overline{\tilde{g}(a_i k_i)}$.

Масштабное условие причинности

Во внутренних линиях не должно быть масштабов a_i , меньших минимального масштаба всех внешних линий



“Головастик” для скалярной ϕ^4 теории:

$$\begin{aligned} T_1^d(Am) &= \frac{1}{C_g^2} \int_{a_3, a_4 \geq A} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{|\tilde{g}(a_3 q)|^2 |\tilde{g}(-a_4 q)|^2}{q^2 + m^2} \frac{da_3}{a_3} \frac{da_4}{a_4} \\ &= \frac{S_d m^{d-2}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty f^2(Amx) \frac{x^{d-1} dx}{x^2 + 1}, \quad A = \min(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Интегрирование по масштабам внутренних линий приводит к эффективной функции обрезания

$$f(x) \equiv \frac{1}{C_g} \int_x^\infty |\tilde{g}(a)|^2 \frac{da}{a}, \quad f(0) = 1$$

Примеры обрезаящих функций

Гауссовы вейвлеты

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\tilde{g}_n(k) = -(-ik)^n e^{-k^2/2}, \quad n > 0$$

$$C_{g_n} = 2 \int_0^\infty a^{2n} e^{-a^2} \frac{da}{a} = \Gamma(n)$$

Обрезающая функция

$$f(n, x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^\infty |\tilde{g}_n(ak)|^2 \frac{da}{a}$$

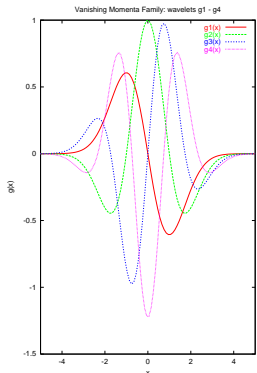
Обрезающие функции для $g_1 - g_4$
вейвлетов:

$$f(1, x) = e^{-x^2}$$

$$f(2, x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}$$

$$f(3, x) = (x^4 + 2x^2 + 2)e^{-x^2}/2$$

$$f(4, x) = (x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6)e^{-x^2}/6$$



В обозначениях работы M.V.Altisky, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 125003

$$\begin{aligned}
 T_1^d(Am) &= \frac{1}{C_g^2} \int_{a_3, a_4 \geq A} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{|\tilde{g}(a_3 q)|^2 |\tilde{g}(-a_4 q)|^2}{q^2 + m^2} \frac{da_3}{a_3} \frac{da_4}{a_4} \\
 &= \frac{S_d m^{d-2}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty f^2(Amx) \frac{x^{d-1} dx}{x^2 + 1} \\
 f(x) &\equiv \frac{1}{C_g} \int_x^\infty |\tilde{g}(a)|^2 \frac{da}{a} = e^{-x^2}
 \end{aligned}$$

В размерности $d = 4$ имеем $T_1^4(\alpha) = \frac{-4\alpha^4 e^{2\alpha^2} \text{Ei}(1, 2\alpha^2) + 2\alpha^2}{64\pi^2 \alpha^4} m^2$,
 где $\alpha \equiv Am$ – безразмерный масштабный фактор, $A = \min(a_1, a_2)$

$$\text{Ei}(1, z) = \int_1^\infty \frac{e^{-xz}}{x} dx$$

В обозначениях работы M.V.Altisky, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 125003

$$\begin{aligned}
 T_1^d(Am) &= \frac{1}{C_g^2} \int_{a_3, a_4 \geq A} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{|\tilde{g}(a_3 q)|^2 |\tilde{g}(-a_4 q)|^2}{q^2 + m^2} \frac{da_3}{a_3} \frac{da_4}{a_4} \\
 &= \frac{S_d m^{d-2}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty f^2(Amx) \frac{x^{d-1} dx}{x^2 + 1} \\
 f(x) &\equiv \frac{1}{C_g} \int_x^\infty |\tilde{g}(a)|^2 \frac{da}{a} = e^{-x^2}
 \end{aligned}$$

В размерности $d = 4$ имеем $T_1^4(\alpha) = \frac{-4\alpha^4 e^{2\alpha^2} \text{Ei}(1, 2\alpha^2) + 2\alpha^2}{64\pi^2 \alpha^4} m^2$,
 где $\alpha \equiv Am$ – безразмерный масштабный фактор, $A = \min(a_1, a_2)$

$$G^{(2)}(a_1, a_2, p) = \frac{\tilde{g}(a_1 p) \tilde{g}(-a_2 p)}{p^2 + m^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\tilde{g}(a_1 p) \tilde{g}(-a_2 p) f^2(Ap) T_1^d(Am)}{(p^2 + m^2)^2} + \dots$$

ϕ^4 : однопетлевой вклад в вершину

a)

$$\frac{p}{a_1} \rightarrow \frac{p}{a_2} = \frac{p}{a_1} \rightarrow \frac{p}{a_2} + \frac{p}{a_1} \begin{array}{c} \text{---} a_3 \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} a_6 \text{---} \end{array} \frac{p}{a_2} + \dots$$

b)

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \text{---} a_5 \text{---} \\ \text{---} a_6 \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} a_7 \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} + \dots$$

+ permutations + ...

Интеграл Рис. b может быть вычислен путем симметризации петлевых импульсов $q \rightarrow q + \frac{s}{2}$, после чего имеем

$$X_d = \frac{\lambda^2}{2} \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d} s^{d-4} e^{-A^2 s^2} \int_0^\infty e^{-4A^2 s^2 y^2} I_d(y) y^{d-3} dy,$$

$$I_d(y) = \int_0^\pi \frac{\sin^{d-2} \theta d\theta}{\beta^2(y) - \cos^2 \theta}, \quad \beta(y) = \frac{y^2 + \frac{1}{4} + \frac{m^2}{s^2}}{y},$$

где θ – угол между импульсом q и полным импульсом $s = p_1 + p_2$.

ϕ^4 : однопетлевой вклад в вершину

Выражение для однопетлевого вклада в вершину

$$X_d = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{f^2(qA)f^2((q-s)A)}{[q^2 + m^2][(q-s)^2 + m^2]},$$

где $s = p_1 + p_2$, $A = \min(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

Интеграл Рис. b может быть вычислен путем симметризации петлевых импульсов $q \rightarrow q + \frac{s}{2}$, после чего имеем

$$X_d = \frac{\lambda^2}{2} \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d} s^{d-4} e^{-A^2 s^2} \int_0^\infty e^{-4A^2 s^2 y^2} I_d(y) y^{d-3} dy,$$
$$I_d(y) = \int_0^\pi \frac{\sin^{d-2} \theta d\theta}{\beta^2(y) - \cos^2 \theta}, \quad \beta(y) = \frac{y^2 + \frac{1}{4} + \frac{m^2}{s^2}}{y},$$

где θ – угол между импульсом q и полным импульсом $s = p_1 + p_2$.

Асимптотика петлевых интегралов

В критической размерности $d = 4$

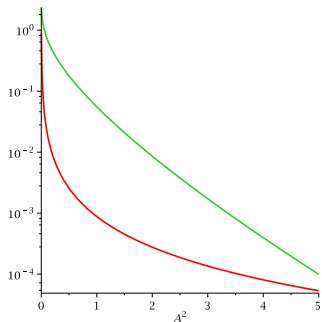
$$X_4 = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} e^{-A^2 s^2} \int_0^\infty e^{-4A^2 s^2 y^2} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^{-2}(y)}\right) dy^2.$$

Асимптотика X_4 при больших импульсах:

$$\lim_{s^2 \gg 4m^2} X_4(\alpha^2) = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \frac{e^{-2\alpha^2}}{2\alpha^2} \left[e^{\alpha^2} - 1 - \alpha^2 e^{2\alpha^2} \text{Ei}(1, \alpha^2) + 2\alpha^2 e^{2\alpha^2} \text{Ei}(1, 2\alpha^2) \right],$$

где $\alpha \equiv As$,

Асимптотика петлевых интегралов



Scale-decay factors for the two-point and four-point Green functions. The bottom curve is the graph of tadpole as a function of A^2 ; the top curve is the graph of vertex divided by $\frac{\lambda^2}{16\pi^2}$ as a function of A^2 . $m = s^2 = 1$ is set for both curves

Модель Гинзбурга-Ландау:

$$H_{GL} = \int d^d x \left[\underbrace{\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{u\phi^2}{2}}_{H_0} + \underbrace{\frac{\lambda}{4!}\phi^4}_{H_I} \right] \equiv H_0 + H_I$$

Разделение на медленные и быстрые переменные:

$$\phi(x) = \phi^-(x) + \phi^+(x)$$

$$\phi^-(x) = \int_{0 \leq k < \frac{\Lambda}{b}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \tilde{\phi}^-(k), \quad \phi^+(x) = \int_{\frac{\Lambda}{b} \leq k < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ikx} \tilde{\phi}^+(k)$$

Масштабное преобразование:

$$H'_{GL} = R_b H_{GL}, \quad R_b : k \rightarrow k' = bk, x \rightarrow x' = x/b.$$

Интегрирование по быстрым переменным приводит к эффективному гамильтониану, зависящему только от медленных переменных:

$$e^{-H'[\phi^-]} = \int \mathcal{D}\phi^+ e^{-H_0[\phi^- + \phi^+]} (1 - H_I[\phi^- + \phi^+]) + O(\lambda^2)$$

$$H'[\phi^-] = H_0[\phi^-] + \langle H_I[\phi^- + \phi^+] \rangle_0^+$$

для модели Гинзбурга-Ландау

$$H'[\phi^-] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial \phi^-)^2 + \frac{1}{2} \left[u + \frac{\lambda}{2} G_0^+ \right] (\phi^-)^2 + \frac{\lambda}{4!} (\phi^-)^4 \right\}$$

где $\langle (\phi^+)^2 \rangle_0^+ \equiv G_0^+ = \int_{\frac{\Lambda}{b} \leq k \leq \Lambda} \frac{d^d k}{k^2 + u} = \underbrace{\frac{S_d \Lambda^{d-2}}{(2\pi)^d (d-2)}}_C (1 - b^{2-d})$

После перехода к штрихованным переменным $k' = bk, x' = x/b$:

$$H' = \int d^d x' \left\{ \frac{b^{d-2-2d_\phi}}{2} (\partial' \phi')^2 + \frac{b^{d-2d_\phi}}{2} \left[u + \frac{\lambda}{2} G_0^+ \right] (\phi')^2 + \frac{b^{d-4d_\phi} \lambda}{4!} (\phi')^4 \right\}$$

Требование инвариантности градиентного члена приводит к

$$u' = b^2 u + C(b^2 - b^\epsilon) \frac{\lambda}{2}, \lambda' = b^\epsilon \lambda, \epsilon = 4 - d$$

Учет однопетлевого вклада $O(\lambda^2)$ дает

$$u' = b^2 \left[u + \frac{\lambda}{16\pi^2} \left(\frac{\Lambda^2}{2} (1 - b^{-2}) - u \ln b \right) \right], \lambda' = b^\epsilon \left[\lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln b \right]$$

Эффективное действие для масштабно-зависимых полей

$$\Gamma[\phi_a] = -W_W[J_a] + \int J_a(x)\phi_a(x)\frac{da}{a}d^d x$$

где $W_W[J_a] = \ln Z_W[J_a]$

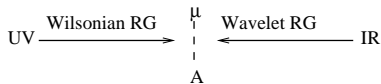
Вершинные функции

$$\Gamma_{(A)}[\phi_a] = \Gamma_{(A)}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma_{(A)}^{(n)}(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \phi_{a_1}(b_1) \dots \phi_{a_n}(b_n) \times$$

$$\times \frac{da_1 d^d b_1}{a_1} \dots \frac{da_n d^d b_n}{a_n}$$

Роль масштаба нормировки играет масштаб наблюдения $A = \min_i a_i$.

$A \frac{\partial}{\partial A} \Gamma_{(A)} = \dots$ – потоковое уравнение



Однопетлевое приближение $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$

$$\Gamma^{(2)} = \Delta - \frac{1}{2} \text{ (loop with } q \text{)} + \dots$$

Эффективная функция обрезания

$$\Gamma^{(4)} = - \text{ (cross)} - \frac{3}{2} \text{ (loop with } q \text{)} + \dots$$

$$f_g(x) = \frac{1}{C_g} \int_x^\infty |\tilde{g}(a)|^2 \frac{da}{a}$$

$$C_g^2 \frac{\Gamma_{(A)}^{(2)}(a_1, a_2, p)}{\tilde{g}(a_1 p) \tilde{g}(-a_2 p)} = p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} T_g^d(A),$$

$$C_g^4 \frac{\Gamma_{(A)}^{(4)}}{\tilde{g}(a_1 p_1) \tilde{g}(a_2 p_2) \tilde{g}(a_3 p_3) \tilde{g}(a_4 p_4)} = \lambda - \frac{3}{2} \lambda^2 X_g^d(A)$$

где

$$T_g^d(A) = \frac{S_d m^{d-2}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty f_g^2(Ax) \frac{x^{d-1} dx}{x^2 + 1},$$

$$X_g^d(A) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{f_g^2(qA) f_g^2((q-s)A)}{[q^2 + m^2] [(q-s)^2 + m^2]},$$

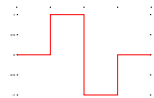
где $s = p_1 + p_2$, $A = \min(a_1, a_2, a_3, a_4)$,

$$C_{g_1} = \frac{1}{2}, f_{g_1}(q) = e^{-q^2}$$

Логарифмическая переменная масштаба

$$\mu = -\ln A + \text{const}$$

Безразмерный масштаб $\alpha = A m$



Вейвлет Хаара

Потоковые уравнения

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = 3\lambda^2 \alpha^2 \frac{\partial X_1^4}{\partial \alpha^2} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \frac{2\alpha^2 + 1 - e^{\alpha^2}}{\alpha^2} e^{-2\alpha^2},$$

$$\frac{1}{m^2} \frac{\partial m^2}{\partial \mu} = \frac{\lambda}{32\pi^2 \alpha^2} - \frac{\lambda}{16\pi^2} + \frac{\lambda}{16\pi^2} 2\alpha^2 e^{2\alpha^2} \text{Ei}_1(2\alpha^2),$$

где

$$\text{Ei}_1(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xz}}{x} dx$$



Вейвлет g_1

$$g_1(x) = -\frac{x e^{-\frac{x^2}{2}}}{(2\pi)^2}$$

$$\tilde{g}_1(k) = -i k e^{-\frac{k^2}{2}}$$

Пусть существует универсальная (для заданной полевой модели) функция F , зависящая лишь от значения константы связи и от отношения масштабов, такая, что $\lambda(a_0) = F\left(\frac{a_0}{a_2}, \lambda(a_2)\right)$.

Пусть $a_2 < a_1 < a_0$ тогда имеет место закон композиции

$$F\left(\frac{a_0}{a_2}, \lambda(a_2)\right) = F\left(\frac{a_0}{a_1}, \lambda(a_1)\right) = F\left(\frac{a_0}{a_1}, F\left(\frac{a_1}{a_2}, \lambda(a_2)\right)\right)$$

В однопетлевом приближении, подстановка


$$\lambda(a_1) = \lambda(a_2) - \frac{3}{2}\lambda^2(a_2) \int_{a_2}^{a_1} d\mu(a) [\text{one-loop}]$$

в

$$\lambda(a_0) = \lambda(a_1) - \frac{3}{2}\lambda^2(a_1) \int_{a_1}^{a_0} d\mu(a) [\text{one-loop}]$$

приводит к сложению интегралов

$$\lambda(a_0) = \lambda(a_2) - \frac{3}{2}\lambda^2(a_2) \int_{a_2}^{a_0} d\mu(a) [\text{one-loop}] + O(\lambda^4),$$



$$\Pi_{AB,\mu\nu}^{(A)}(p) = -\frac{g^2}{2} f^{ABC} f^{BDC} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{N_{\mu\nu}(l, p) F_A(l+p, l)}{l^2(l+p)^2}$$

$$N_{\mu\nu}(l, p) = 10l_\mu l_\nu + 5(l_\mu p_\nu + l_\nu p_\mu) - 2p_\mu p_\nu + (p-l)^2 \delta_{\mu\nu} + (2p+l)^2 \delta_{\mu\nu}$$

после симметризации по петлевым импульсам $l = q - \frac{p}{2}$ получим

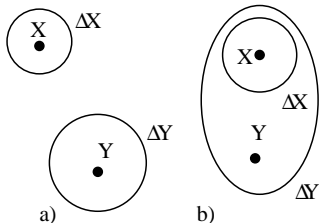
$$\Pi_{AB,\mu\nu}^{(A)}(p) = \frac{g^2 f^{ACD} f^{BDC}}{32\pi^4} \int d^4 q \frac{\frac{9p_\mu p_\nu}{2} - 10q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{9p^2}{2} + 2q^2\right)}{\left[q^2 - \frac{p^2}{4}\right]^2} F_A(p, q)$$

Для g_1 вейвлета в ИК пределе $\Pi_{AB,\mu\nu}^{(A, g_1)}(p \rightarrow 0) = -\frac{9g^2 f^{ACD} f^{BDC} \delta_{\mu\nu}}{256\mathcal{A}^2}$

Упорядочение операторов и коммутационные

соотношения

Оператор большего масштаба действует первым



Обобщенные коммутационные соотношения Алтайский М.В. *Письма в ЭЧАЯ* 2(6) (2005) 7-11

$$T(A_{\Delta x}(x)B_{\Delta y}(y)) = \begin{cases} A_{\Delta x}(x)B_{\Delta y}(y), & y_0 < x_0, \\ \pm B_{\Delta y}(y)A_{\Delta x}(x), & x_0 < y_0, \\ A_{\Delta x}(x)B_{\Delta y}(y), & \Delta x \subset \Delta y, \\ \pm B_{\Delta y}(y)A_{\Delta x}(x), & \Delta y \subset \Delta x, \end{cases}$$

В соответствии с принципом **region causality** Christensen and Crane, *J.Math.Phys.* **46**(2005)122502

Упорядочение операторов и коммутационные

соотношения

Оператор большего масштаба действует первым

Коммутационные соотношения (символически)

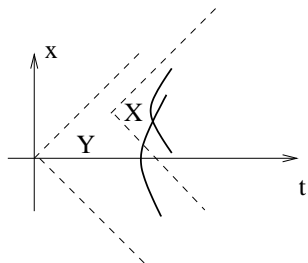
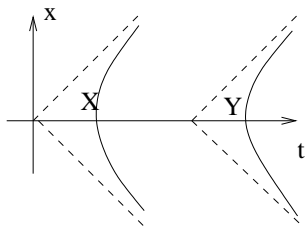
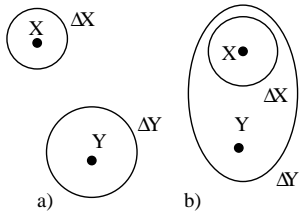
$$\begin{aligned} [u_{a_1}^+(k_1), u_{a_2}^-(k_2)] &= C_g a_1 \delta(a_1 - a_2) [u^+(k_1), u^-(k_2)] \\ u^\pm(k) &= \frac{1}{C_g} \int \frac{da}{a} \tilde{g}(ak) u_a^\pm(k) \end{aligned}$$

подробности М.А. and N.Капуткина, *Int. J. Theor. Phys.* **55**(2016)2805

Обобщенные коммутационные соотношения Алтайский М.В. *Письма в ЭЧАЯ* **2**(6) (2005) 7-11

$$T(A_{\Delta x}(x)B_{\Delta y}(y)) = \begin{cases} A_{\Delta x}(x)B_{\Delta y}(y), & y_0 < x_0, \\ \pm B_{\Delta y}(y)A_{\Delta x}(x), & x_0 < y_0, \\ A_{\Delta x}(x)B_{\Delta y}(y), & \Delta x \subset \Delta y, \\ \pm B_{\Delta y}(y)A_{\Delta x}(x), & \Delta y \subset \Delta x, \end{cases}$$

В соответствии с принципом **region causality** Christensen and Crane, *J.Math.Phys.* **46**(2005)122502



Поправка к энергии Казимира

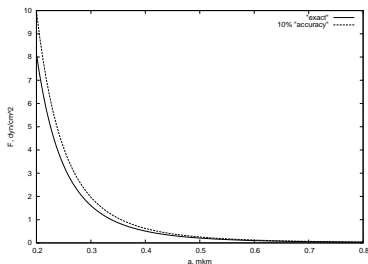
$$\mathcal{E}(a, \delta) = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^3} \left[1 + \frac{2}{7} \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2 + \frac{3}{28} \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^4 + \dots \right],$$

Поправка к силе Казимира

$$\mathcal{F}(a, \delta) = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4} \left[1 + \frac{10}{21} \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi\delta}{a} \right)^4 + \dots \right],$$

M.V.Altaisky, N.E.Karutkina, *Письма в ЖЭТФ* **96** (2011)371

Deviation of Casimir force between two plates of unit area in vacuum. The solid line denotes the "exact" Casimir force ($\delta = 0$), the dashed line denotes the scale-dependent Casimir force with $\delta/a = 0.1$.



Использование пространства масштабно-зависимых функций $\phi_a(x) \in \oplus_i D_i$ позволяет строить конечную теорию с эффективными константами (зарядами), зависящими лишь от масштаба наблюдения. Перенормировки самих полей при этом не требуется.

Введение оператора масштабного преобразования \hat{d} , связанного с ренормализационной группой, представляется вполне естественным с чисто алгебраической точки зрения

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x, & \hat{p} &= -i\hbar\partial_x, & \hat{d} &= x\partial_x \\ [\hat{x}, \hat{p}] &= -i\hbar, & [\hat{d}, \hat{x}] &= \hat{x}, & [\hat{d}, \hat{p}] &= -\hat{p}\end{aligned}$$

Спасибо за внимание !